Principe des tests statistiques

Plan

1. Démarche
2. Hypothèses
3. Prédiction
4. Observations
5. Confrontation
6. Conclusion
7. Risques

I. Démarche

- Cadre epistémologique
  - Francis Bacon : approche inductive 16/17e

Réalité → Faits → observation → Induction → THEORIE Représentation de la réalité

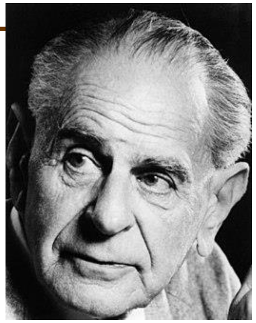
observation → Invention → THEORIE Représentation biaisée

Observation neutre et objective :

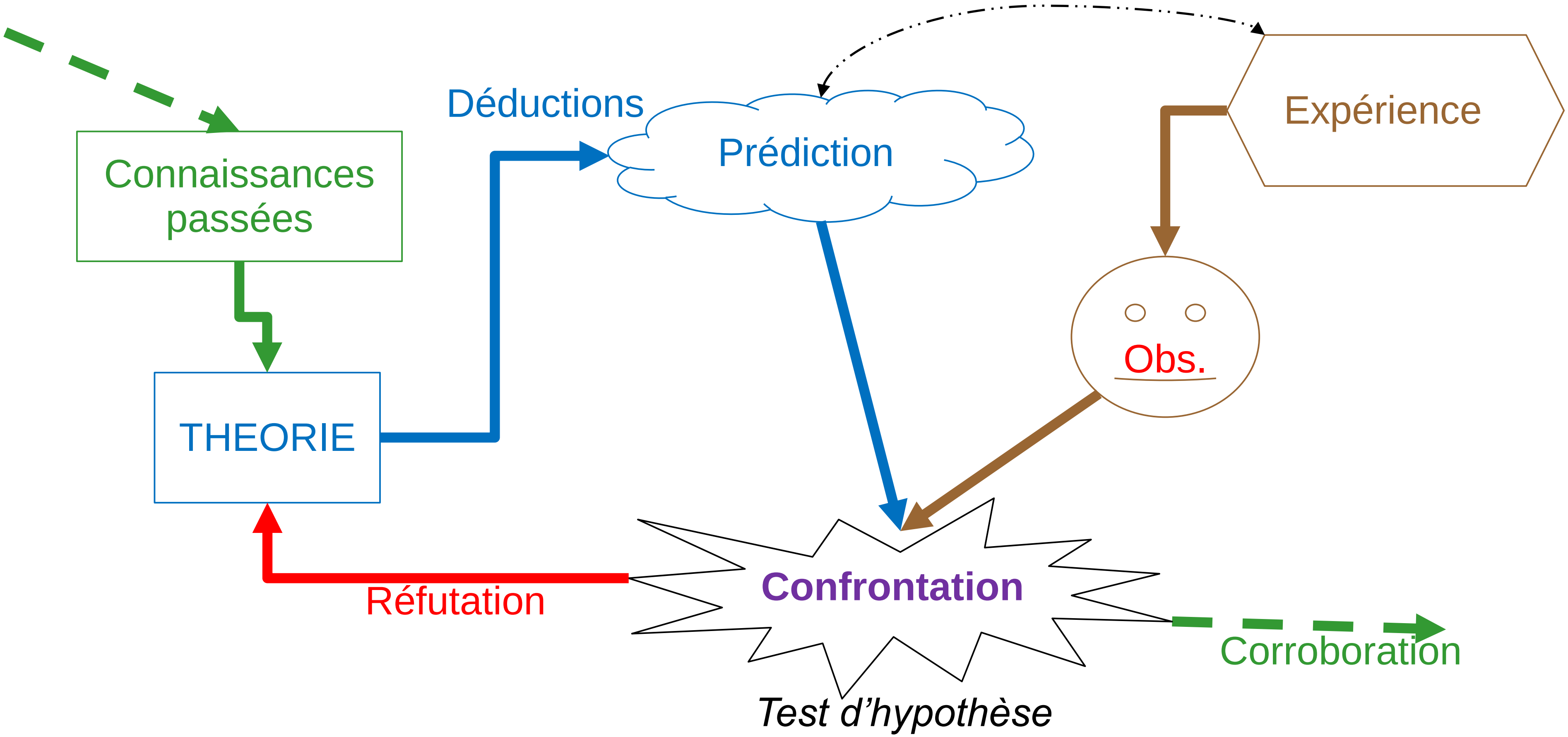
0 théories
0 hypothèses
0 préjugés
0 traditions
0 perturbations

Obligation d'objectivité parfaite
=> Impossibilité concrète

I. Démarche



- Cadre epistémologique
  - Karl Popper : approche déductive 20e

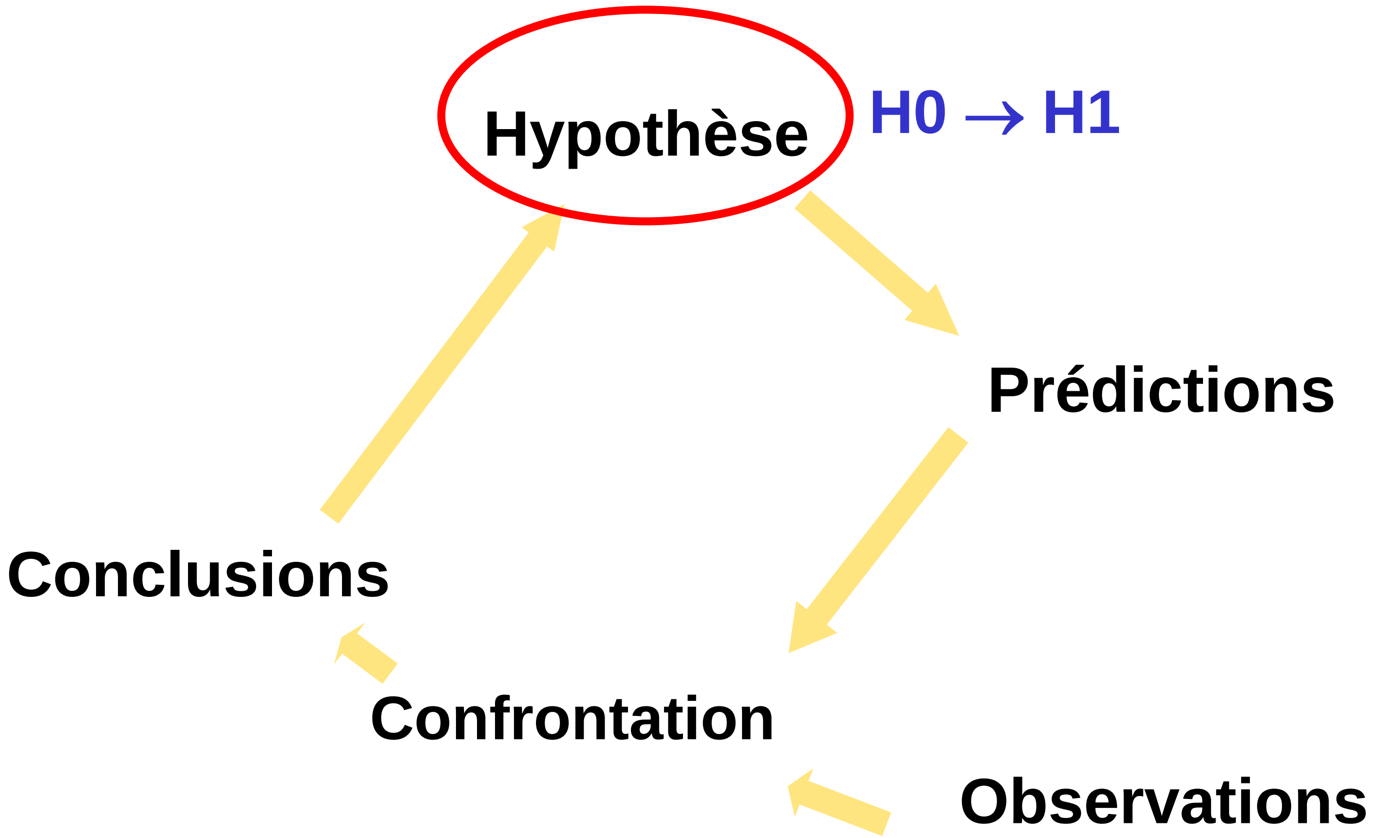


I. Démarche

- Hypothético-déduction
  - Formuler une **hypothèse H0** (hypothèse nulle)
  - Formuler une **hypothèse H1** si H0 fausse (hypothèse alternative)
  - Prédiction: **sous H0** (si H0 vraie) que doit-on observer ?
  - Observation: étude épidémiologique
  - Confrontation: observation/ prédiction sous H0
  - Conclusion

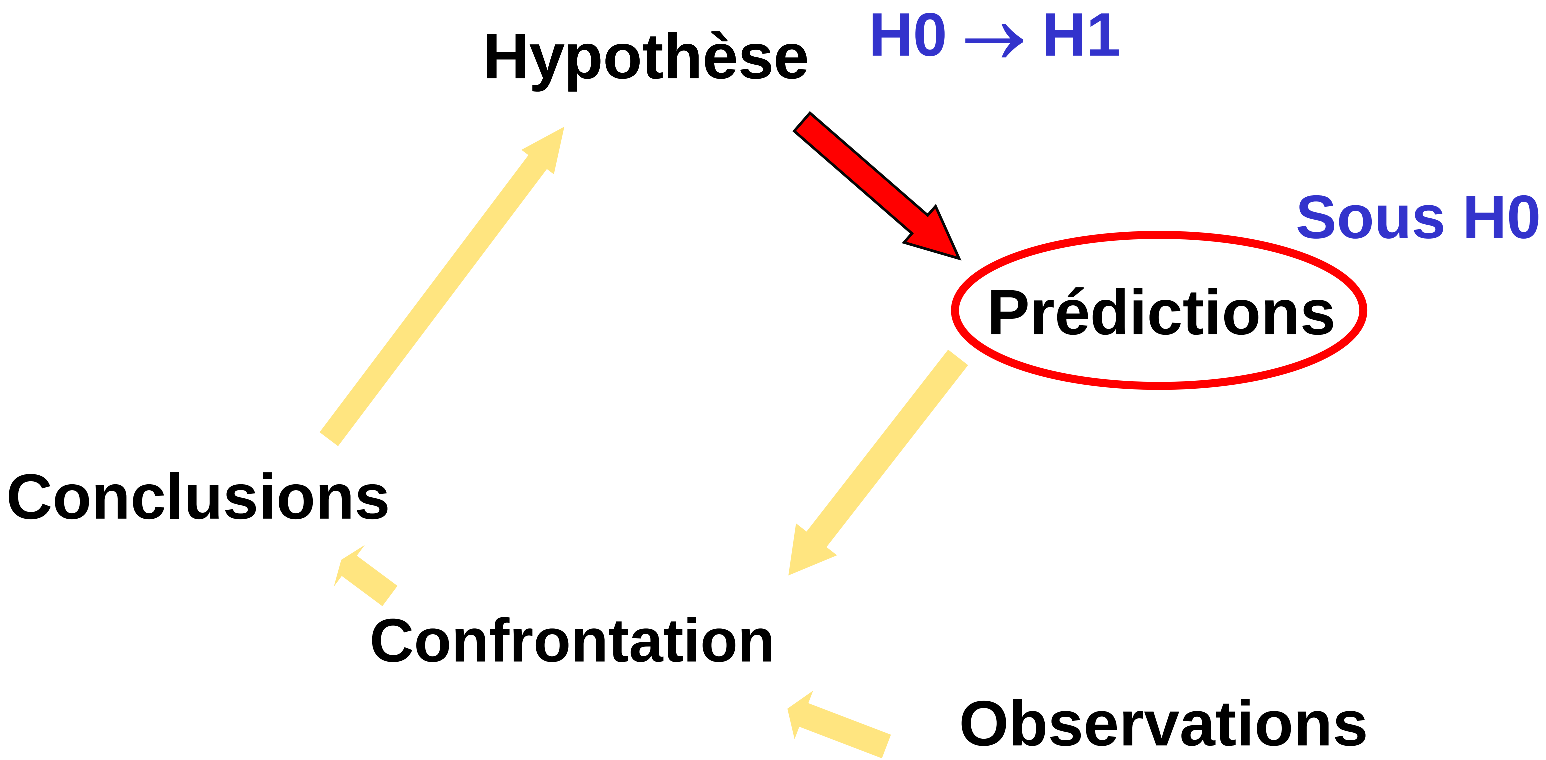
I…

- Hypothético-déduction



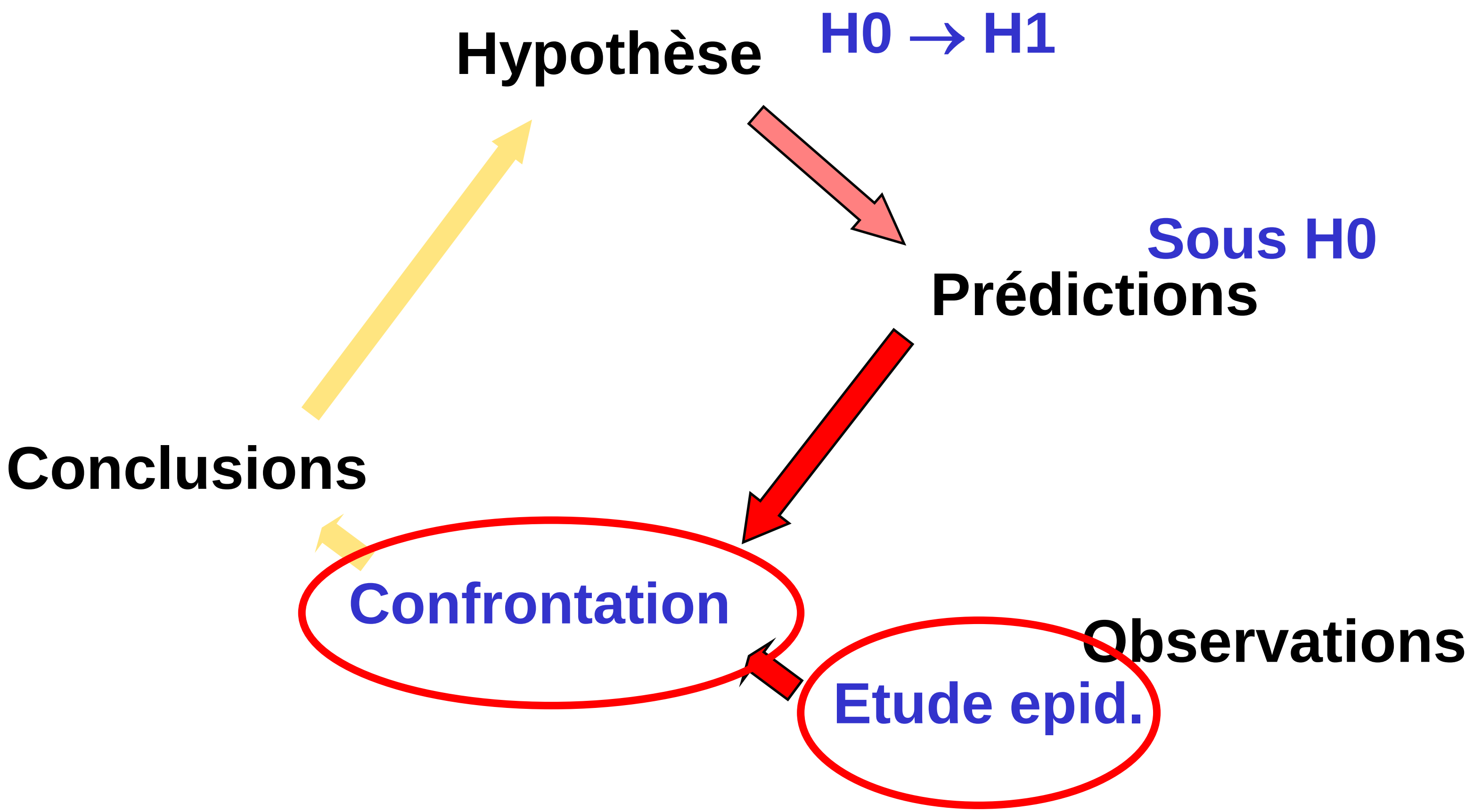
I…

- Hypothético-déduction



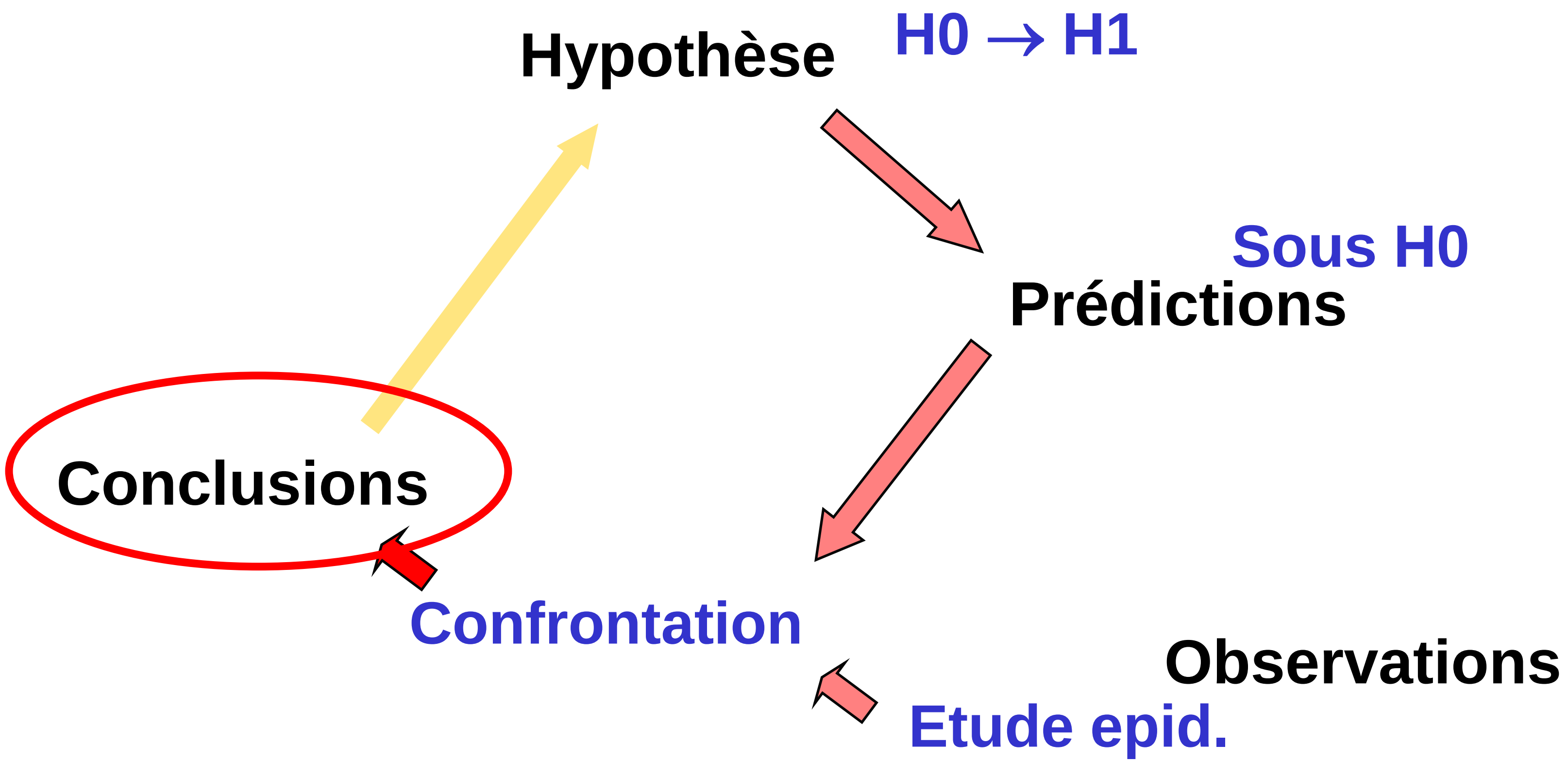
I…

- Hypothético-déduction



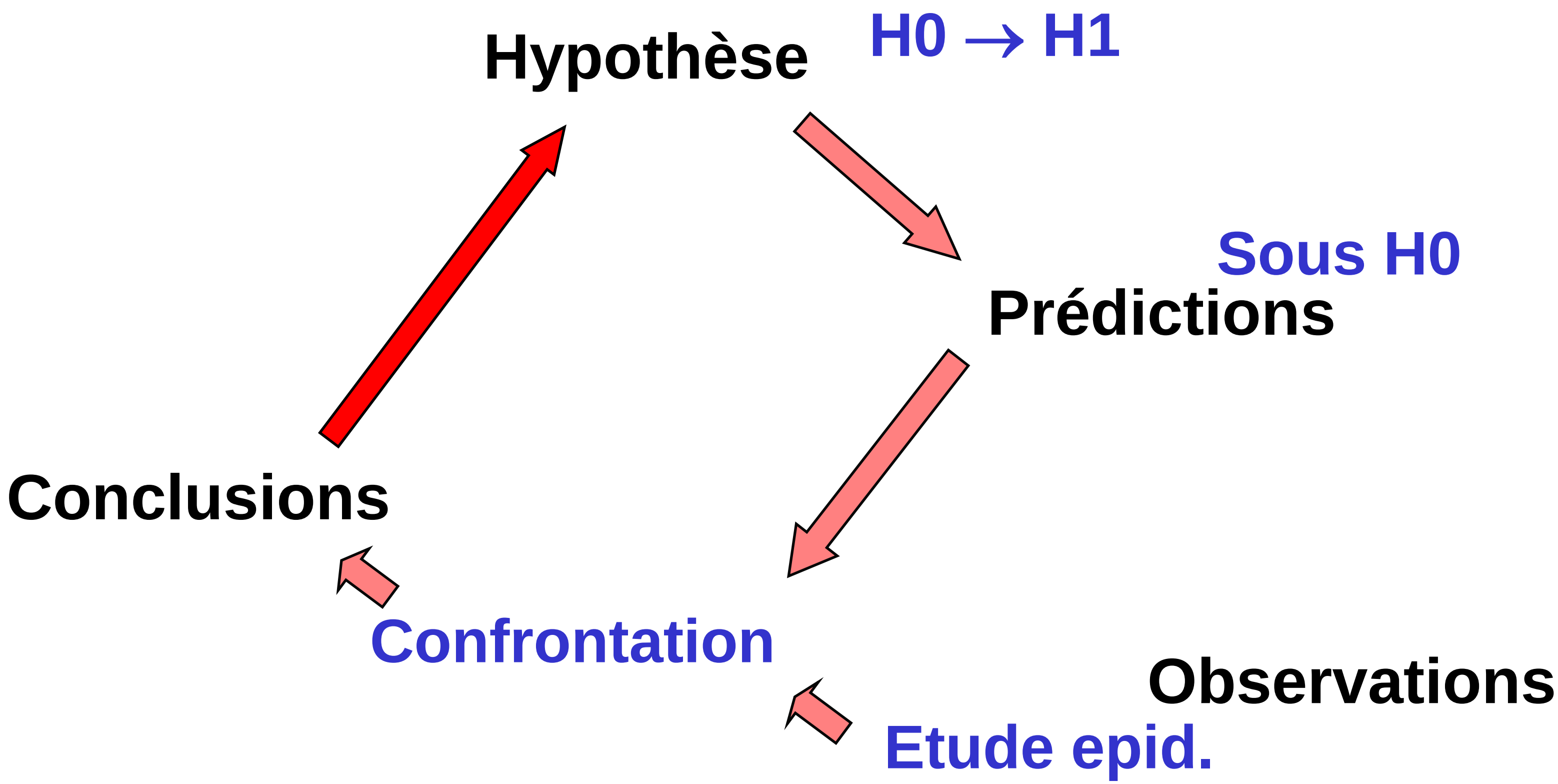
I…

- Hypothético-déduction



I…

- Hypothético-déduction



II. Formuler les hypothèses

Hypothèse nulle:

Hypothèse que l'on souhaite invalider

- invalider une hypothèse:
  - trouver 1 contre-exemple

- valider une hypothèse :
  - vérifier toutes les situations possibles

II…

- Exemple:

En France, 1997, tour de taille moyen

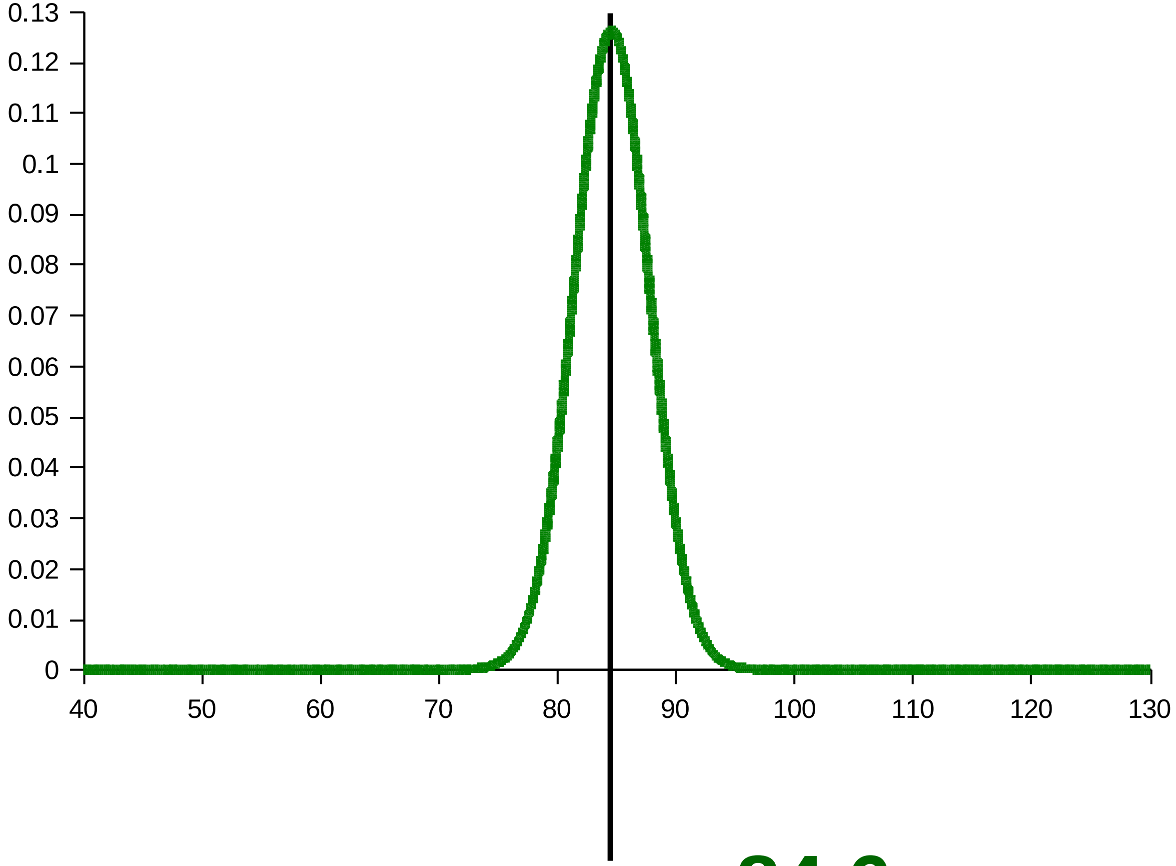
μ_{H0}= 84,6 cm valeur de référence

$\mu = \mu_{H0}=84,6$

H0: en 2006, le tour de taille n'a pas changé,

la population n'a pas grossi (en moyenne)

II…



$$\mu = \mu_{H0} = 84{,}6$$

II…

- Exemple:

En France, 1997, tour de taille moyen

μ_{H0}= 84,6 cm valeur de référence

$\mu = \mu_{H0} = 84,6$

H0: en 2006, le tour de taille n'a pas changé,

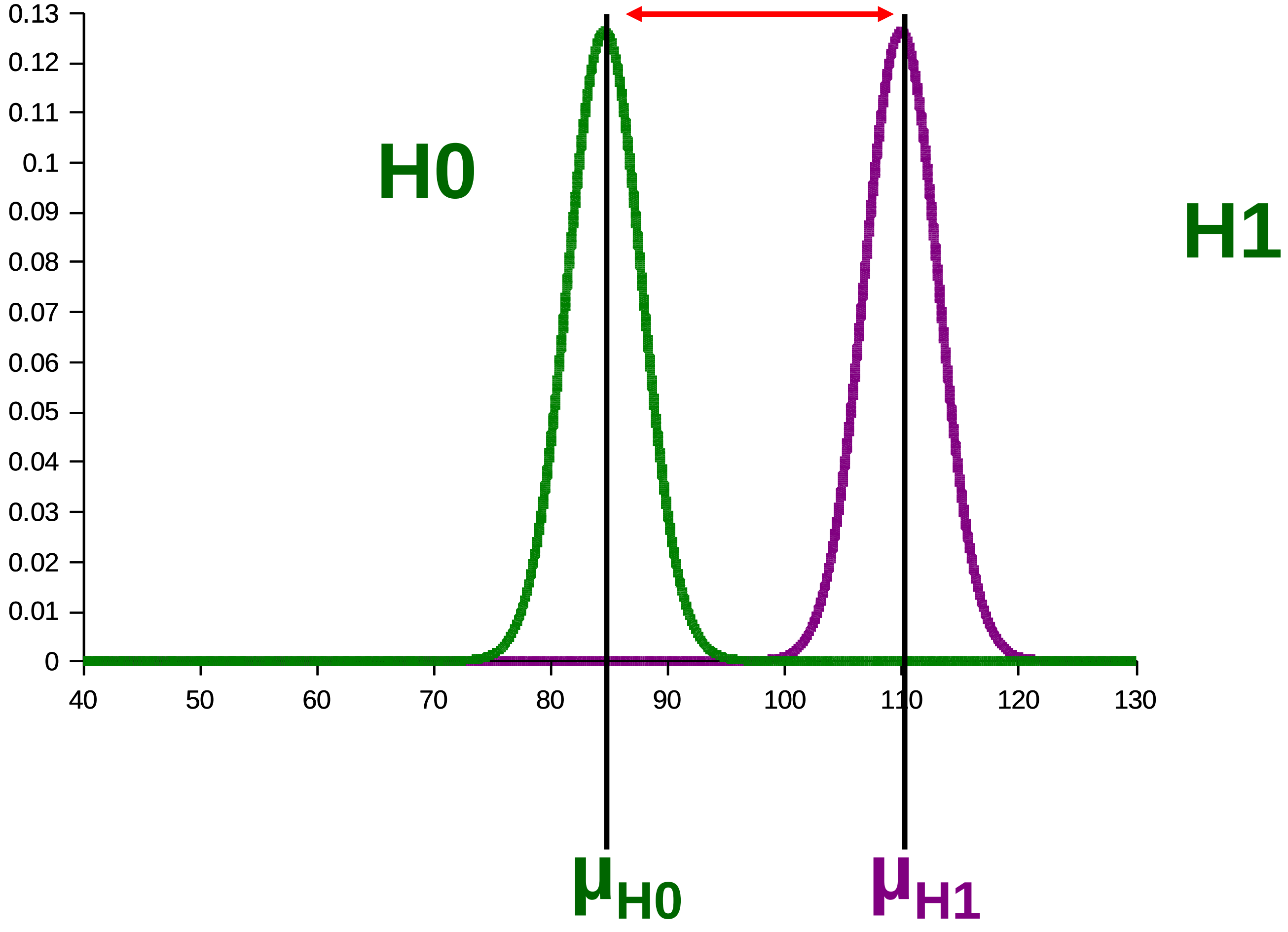
la population n'a pas grossi (en moyenne)

H1: en 2006, le tour de taille a changé,

la population a grossi (en moyenne)

$\mu \neq 84,6$

II…


0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
H0
H1
μ_{H0}
μ_{H1}

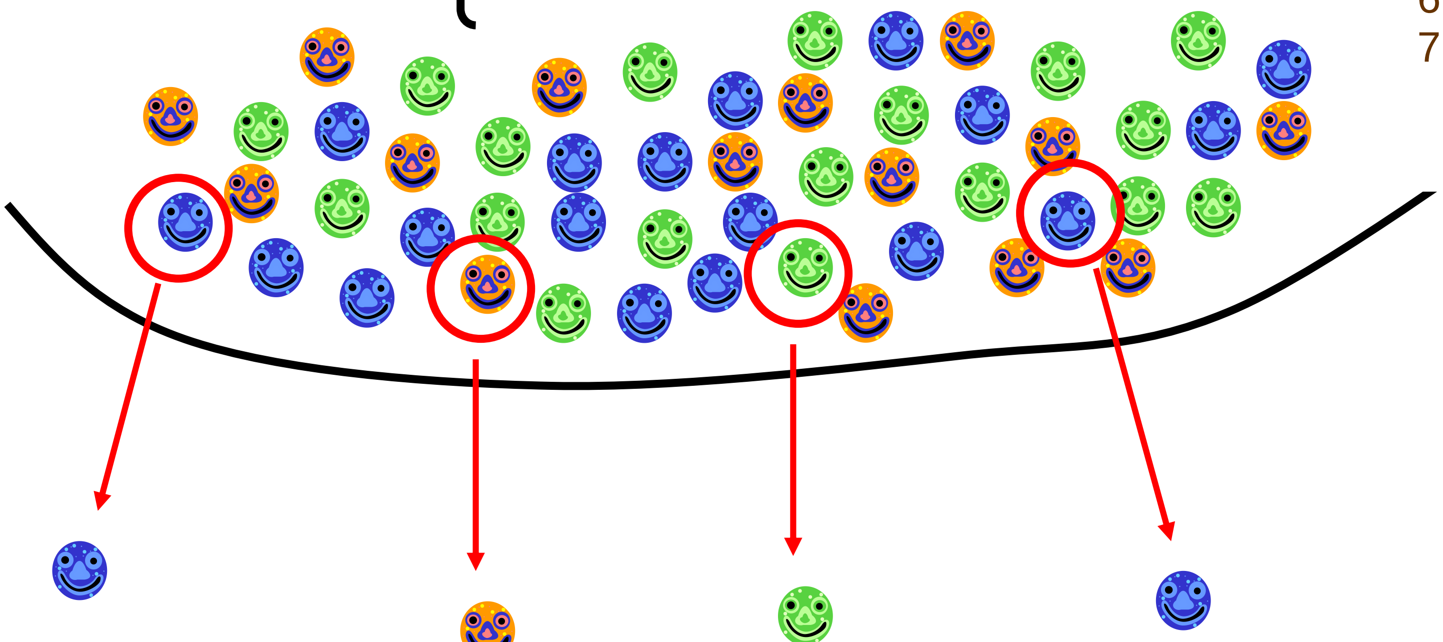
II…

Attention:

on s'intéresse au tour de taille **moyen**:

- X la V.A. « tour de taille », de moyenne μ et de variance σ^2

$$X \sim> \begin{cases} \mu = 84{,}6 \text{ cm} \\ \sigma^2 = 4 \text{ cm}^2 \end{cases}$$



$x_1 = 85{,}9$ cm

$x_2 = 84{,}7$ cm

$x_3 = 83{,}2$ cm

$x_4 = 84{,}3$ cm

II…

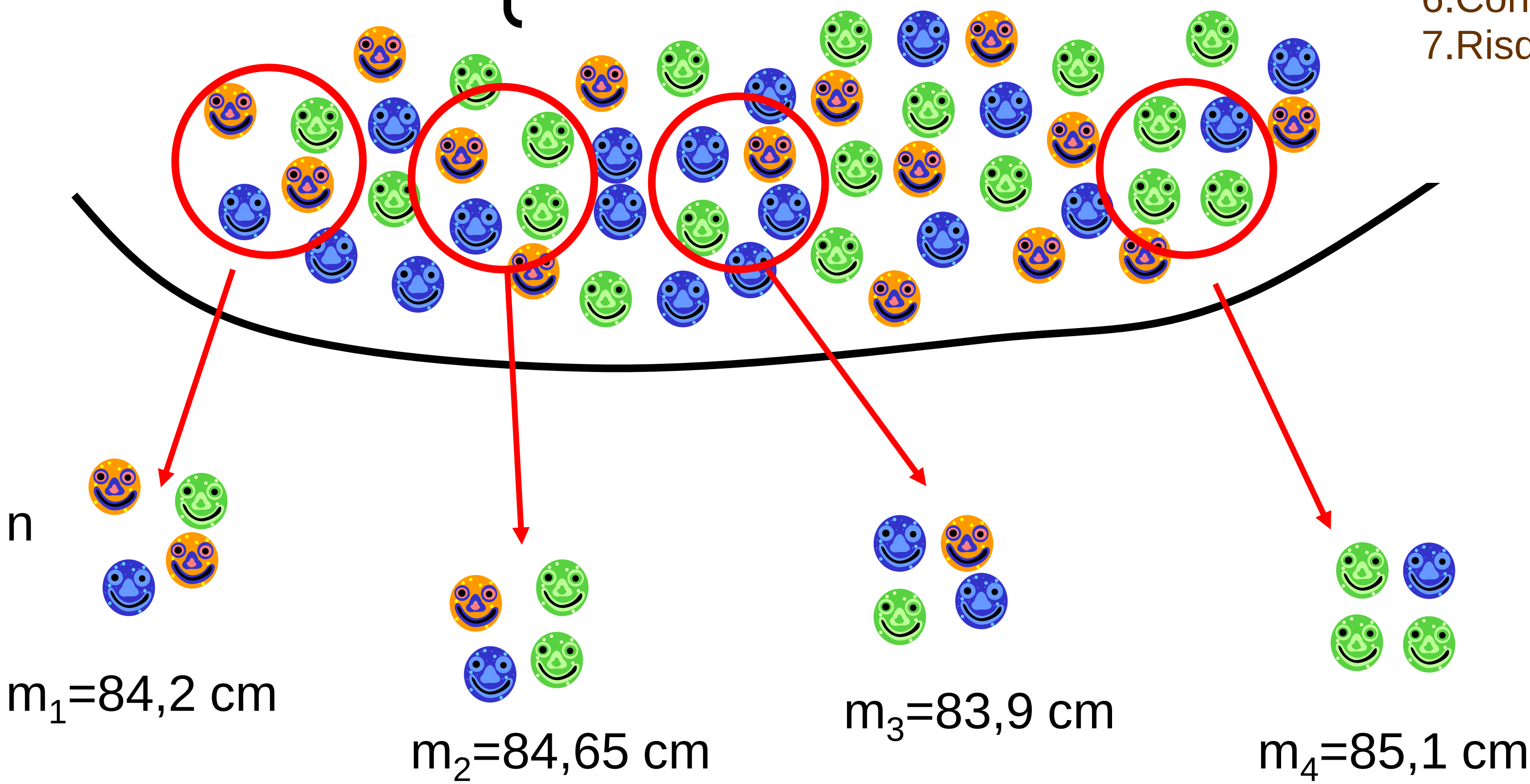
Attention:

!

on s'intéresse au tour de taille **moyen**:

- X la V.A. « tour de taille », de moyenne μ et de variance σ^2
- M la V.A. « tour de taille moyen », de moyenne μ et de variance σ^2/n

$$M \sim> \begin{cases} \mu = 84{,}6 \text{ cm} \\ \sigma^2/n = 1 \text{ cm}^2 \end{cases}$$



1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

III. Prédiction

Prédiction sous H0

- Protocole

  → 1 échantillon T.A.S. dans la population française en 2006

  tirage au sort

- Estimation du tour de taille moyen M:

  si H0 vraie

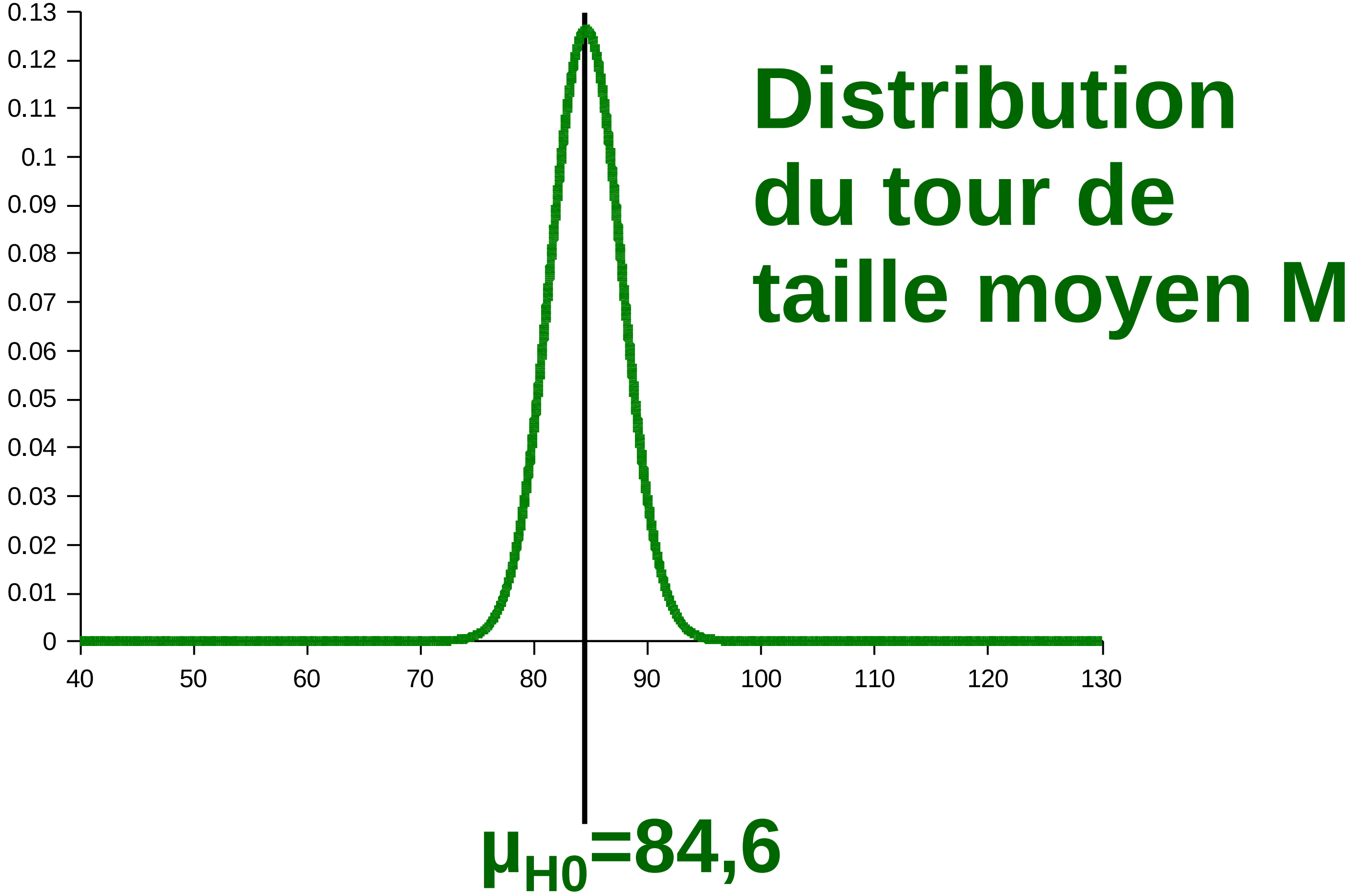
Distribution de (M) → $N(\mu \approx \mu_{H0}\ ;\ \sigma^2/n)$

Aux fluctuations d'échantillonnage près +++

$$\mathbf{m_{obs} \approx 84{,}6}$$

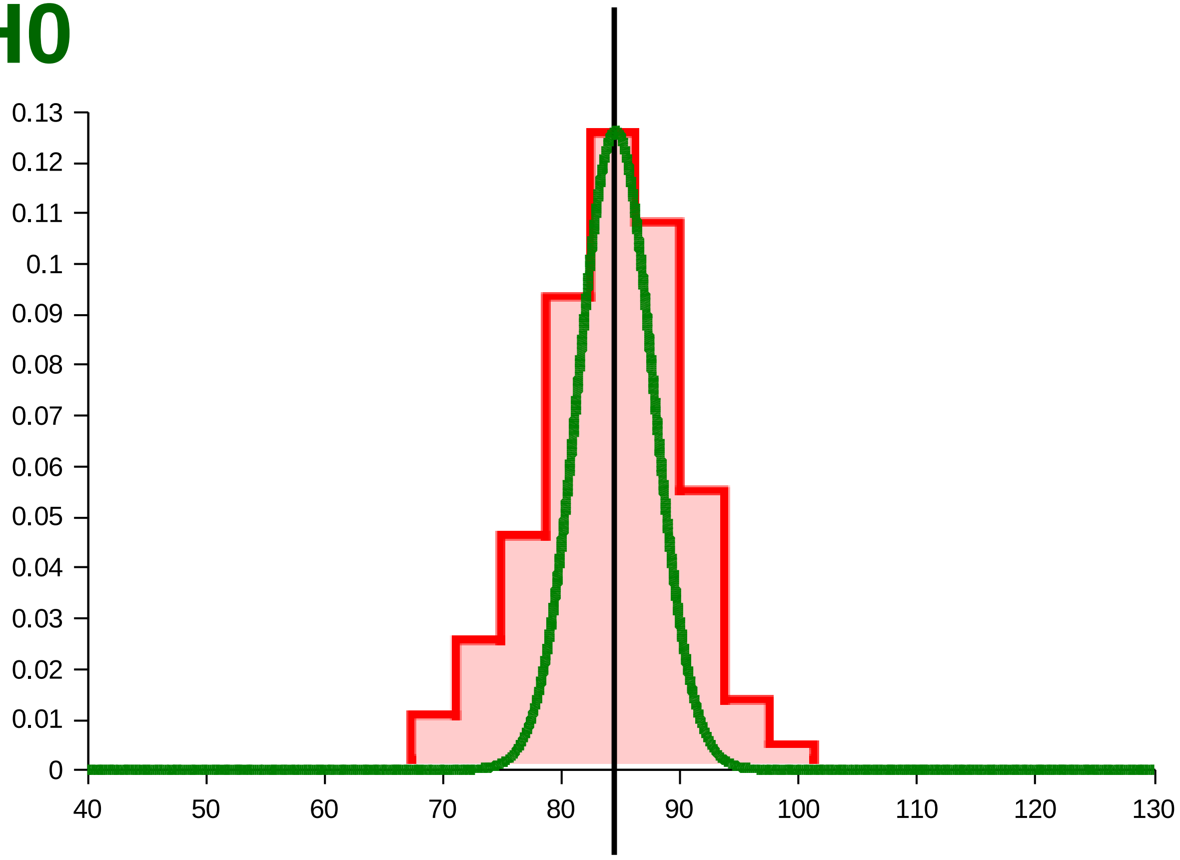
III…

- **sous H0**


0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
Distribution du tour de taille moyen M
μ_{H0}=84,6

III…

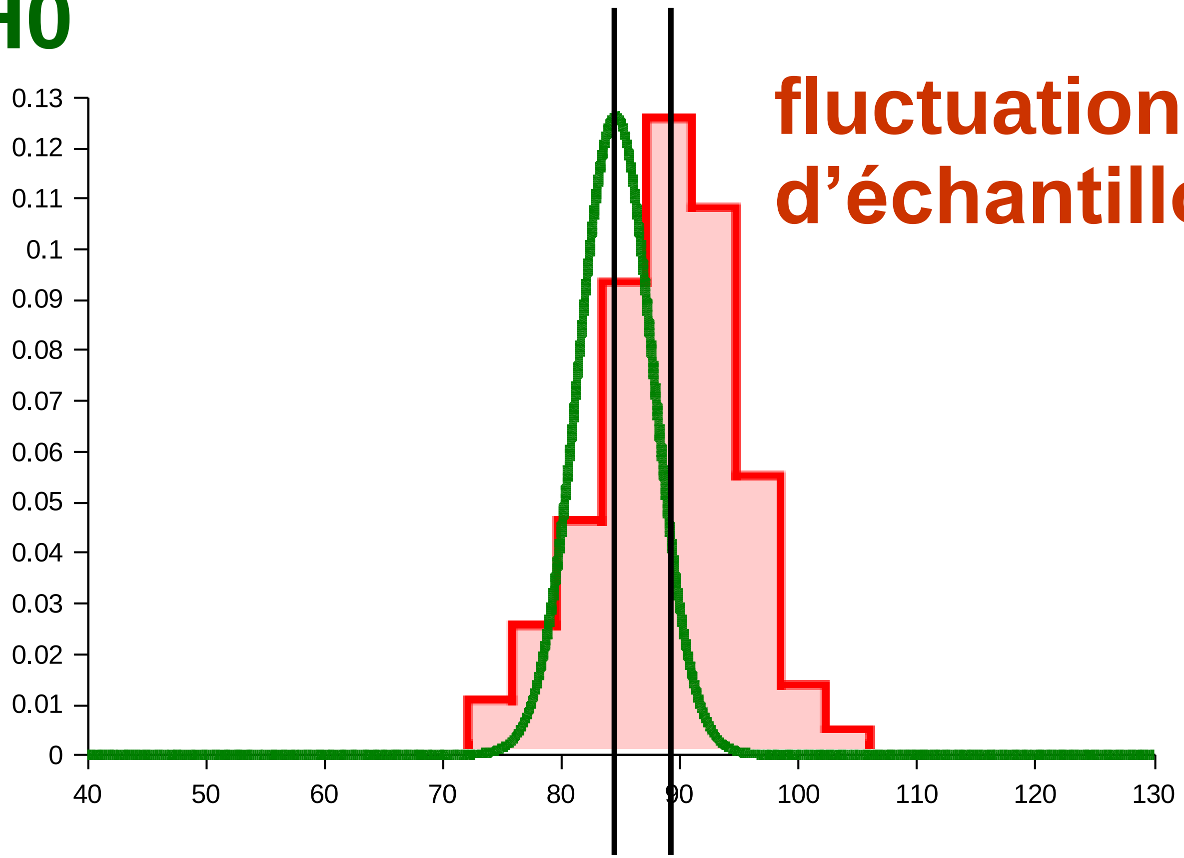
- **sous H0**



$$\mu_{H0}=84{,}6=m$$

III…

- **sous H0**



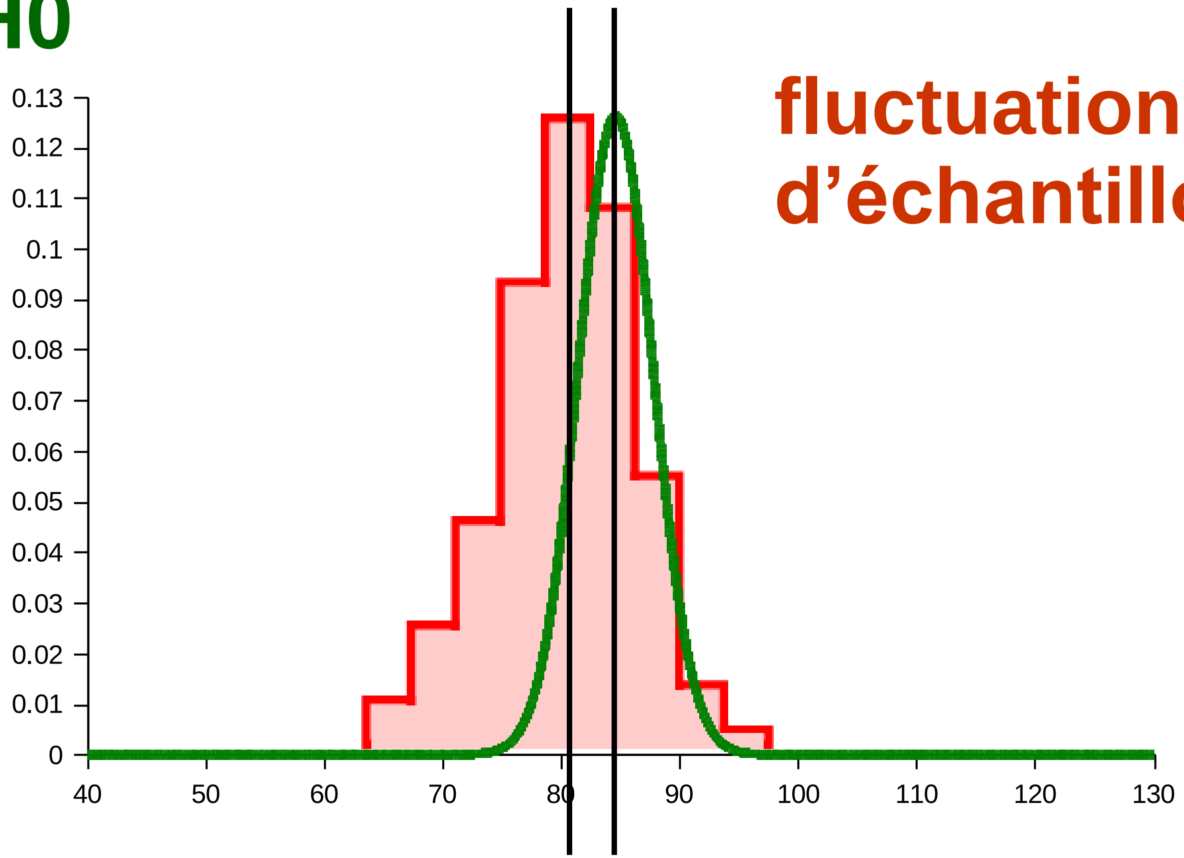
fluctuations d'échantillonnage

$$\mu_{H0}=84{,}6 \approx m$$

III…

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

- **sous H0**



fluctuations d'échantillonnage

μ_{H0}=84,6≈m

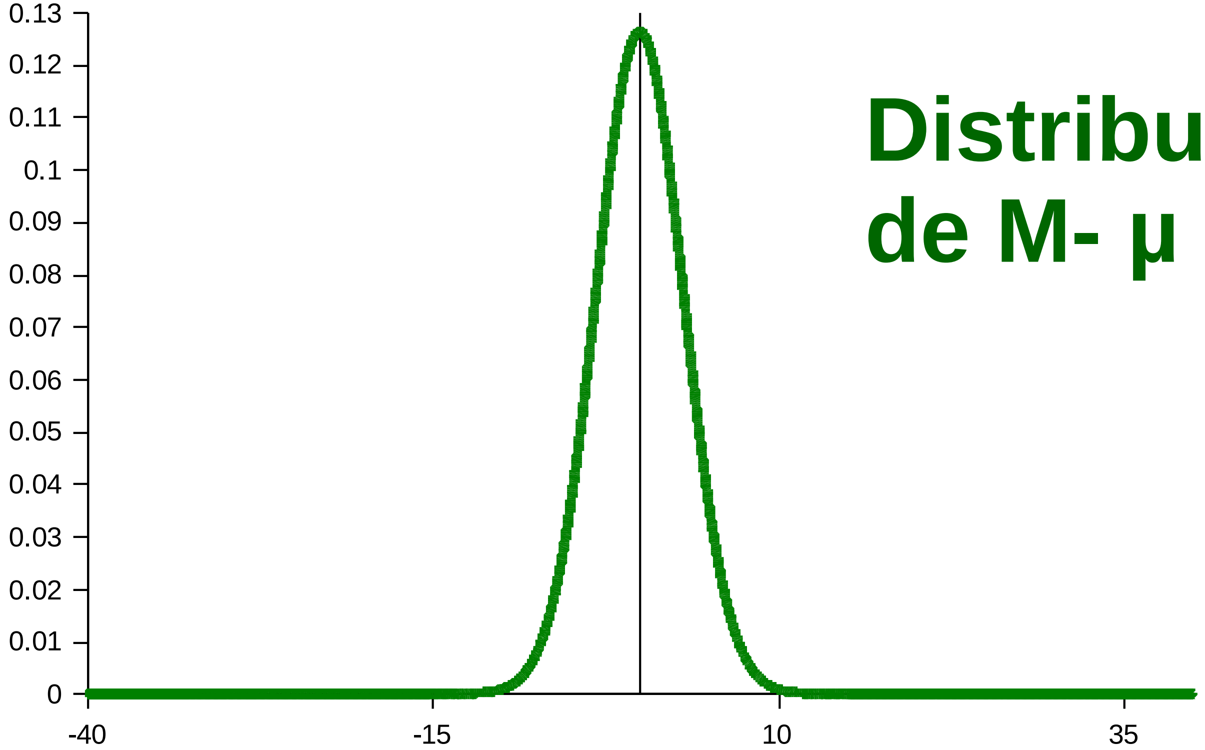
III…

- **sous H0**
  - **$M - \mu_{H0} \approx 0$ si H0 vraie**
  - Distribution de $(M - \mu_{H0}) \rightarrow N(\mu - \mu_{H0} \approx 0 ; \sigma^2/n)$

Aux fluctuations d'échantillonnage près

III…

- **sous H0**



Distribution de M- μ_{H0}

$m - \mu_{H0} \approx 0$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

III…

- **sous H0**
  - **$m - \mu_{H0} \approx 0$ si H0 vraie**
  - Tenir compte de la variabilité individuelle **σ^2** et de la taille de l'échantillon **n**

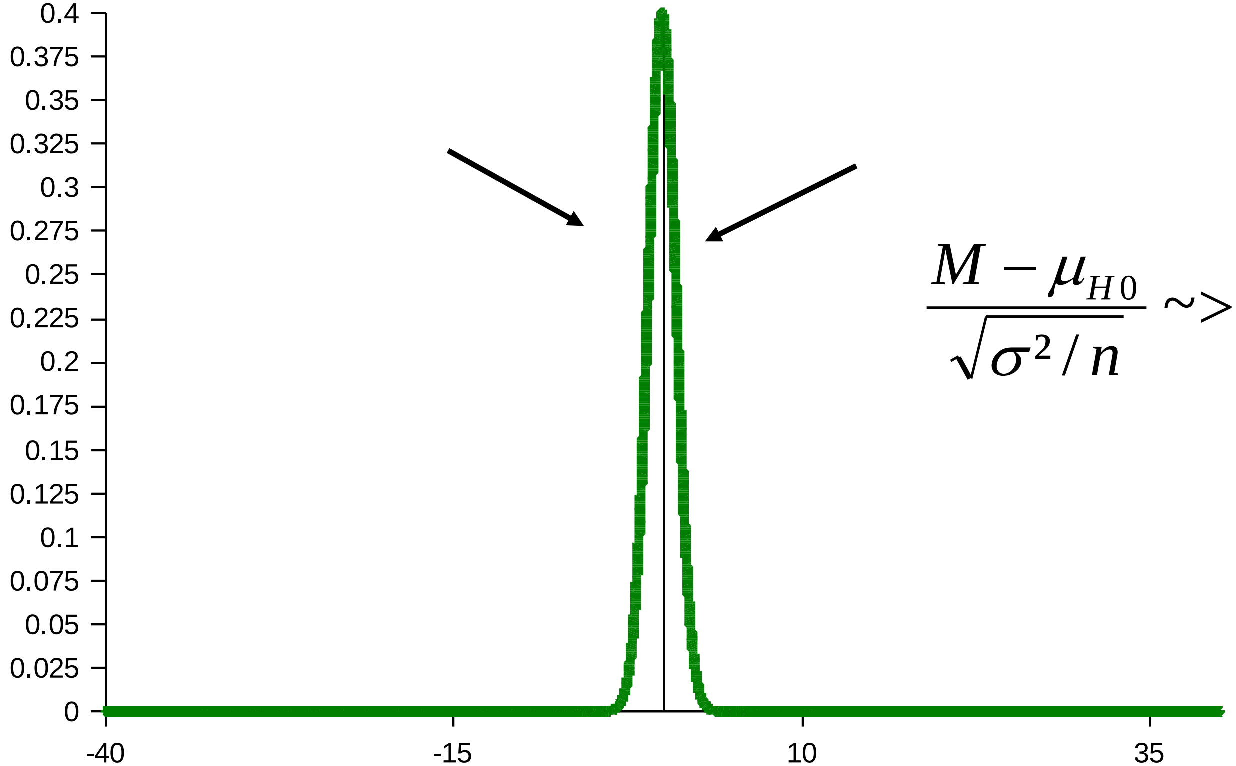
$$\frac{M - \mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \sim> N(0;1)$$

voir cours « Lois de distribution », Loi Normale centrée réduite

notée Z

III…

- **sous H0**



$$\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim> N(0;1)$$

$m - \mu_{H0} \approx 0$

III…

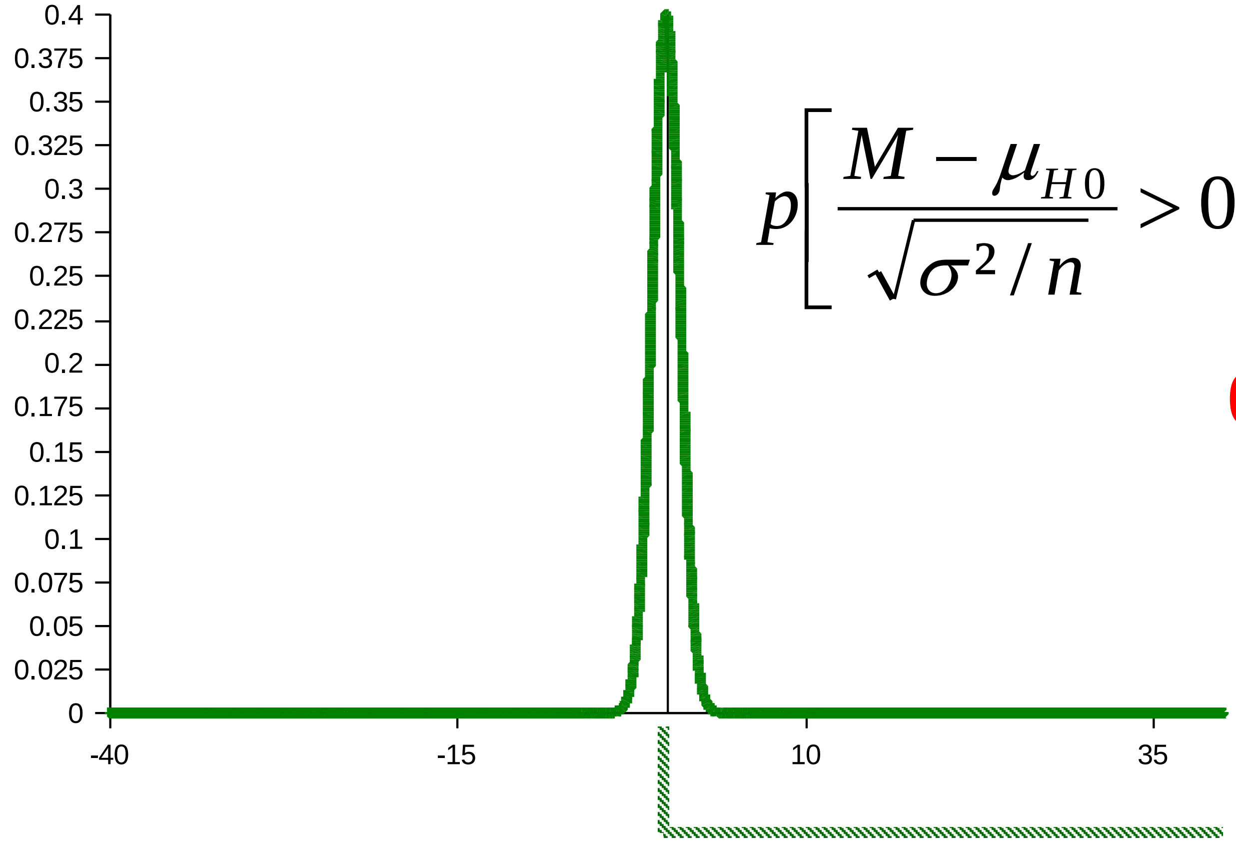
- Si *le tour de taille n'a pas changés*, qu'elle chance avons nous d'observer un tour de taille moyen supérieur à 84,6 cm?
- Si H0 est vraie, qu'elle chance avons nous d'observer une valeur de **M** supérieure à μ_{H0}?
- Si H0 est vraie, qu'elle chance avons nous d'observer une valeur de **Z** supérieure à **0**?

$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > 0 / H0\, vraie\right]$$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

III…

- **sous H0**



$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > 0 / H0\, vraie\right]$$

0,5

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

III…

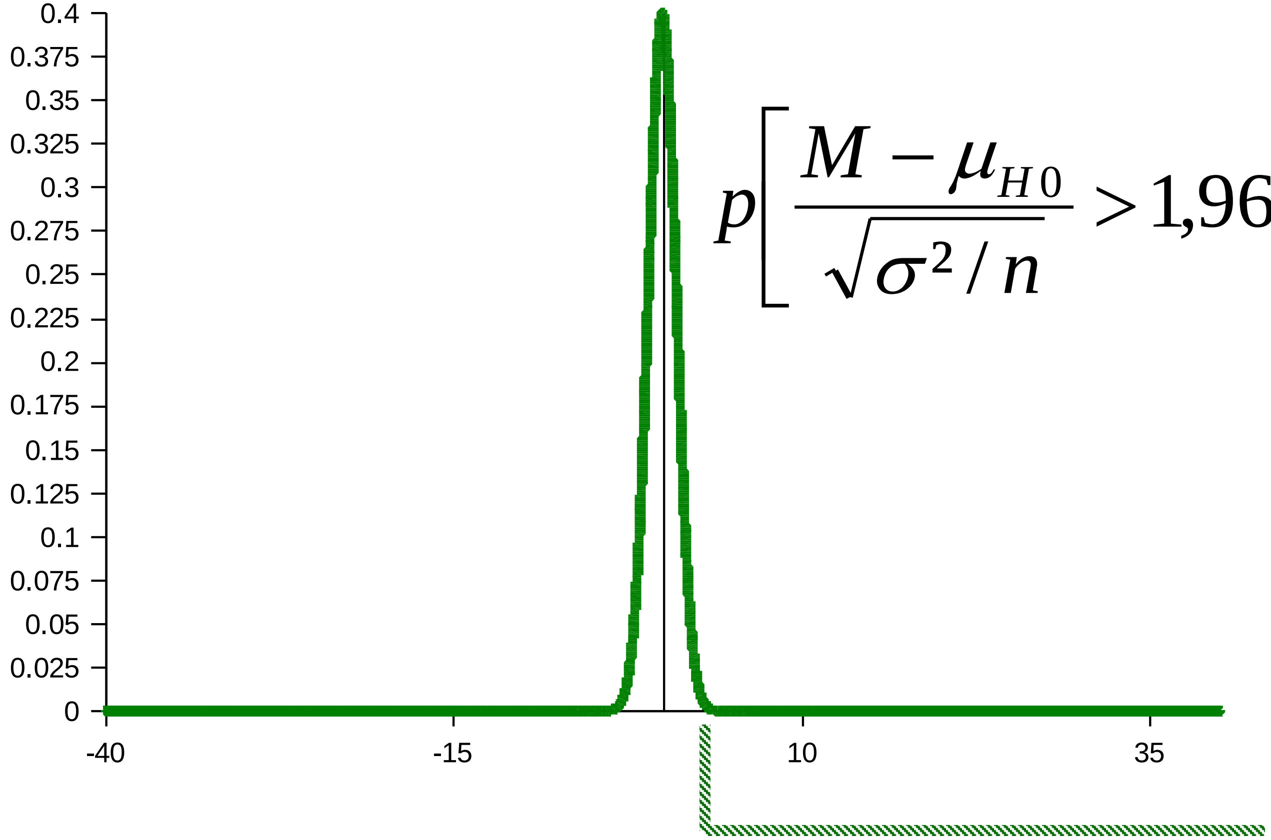
- Si *le tour de taille n'a pas changés*, qu'elle chance avons nous d'observer un tour de taille moyen supérieur à 85,3 cm?
- Si H0 est vraie, qu'elle chance avons nous d'observer une valeur de **M** supérieure à **85,3**?
- Si H0 est vraie, qu'elle chance avons nous d'observer une valeur de **Z** supérieure à **1,96**?

$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > 1{,}96 / H0\ vraie\right]$$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

III…

- sous **H0**



$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > 1{,}96 \,/\, H0\ vraie\right]$$

0,05

IV. Observations

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observation
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

- Protocole : Réalisation

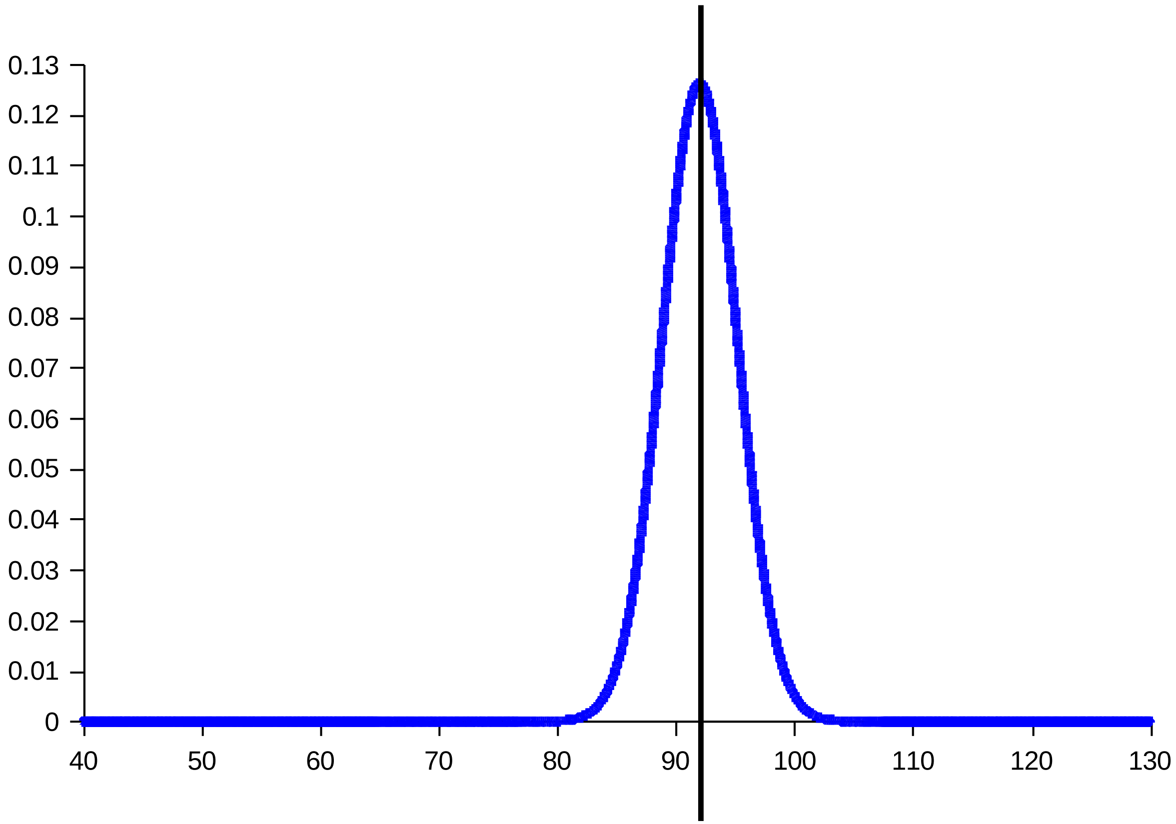
  → 1 échantillon T.A.S. dans la population française en 2006

- Estimation du tour de taille, observée

$$\mathbf{m_{obs}=88{,}26\ cm}$$

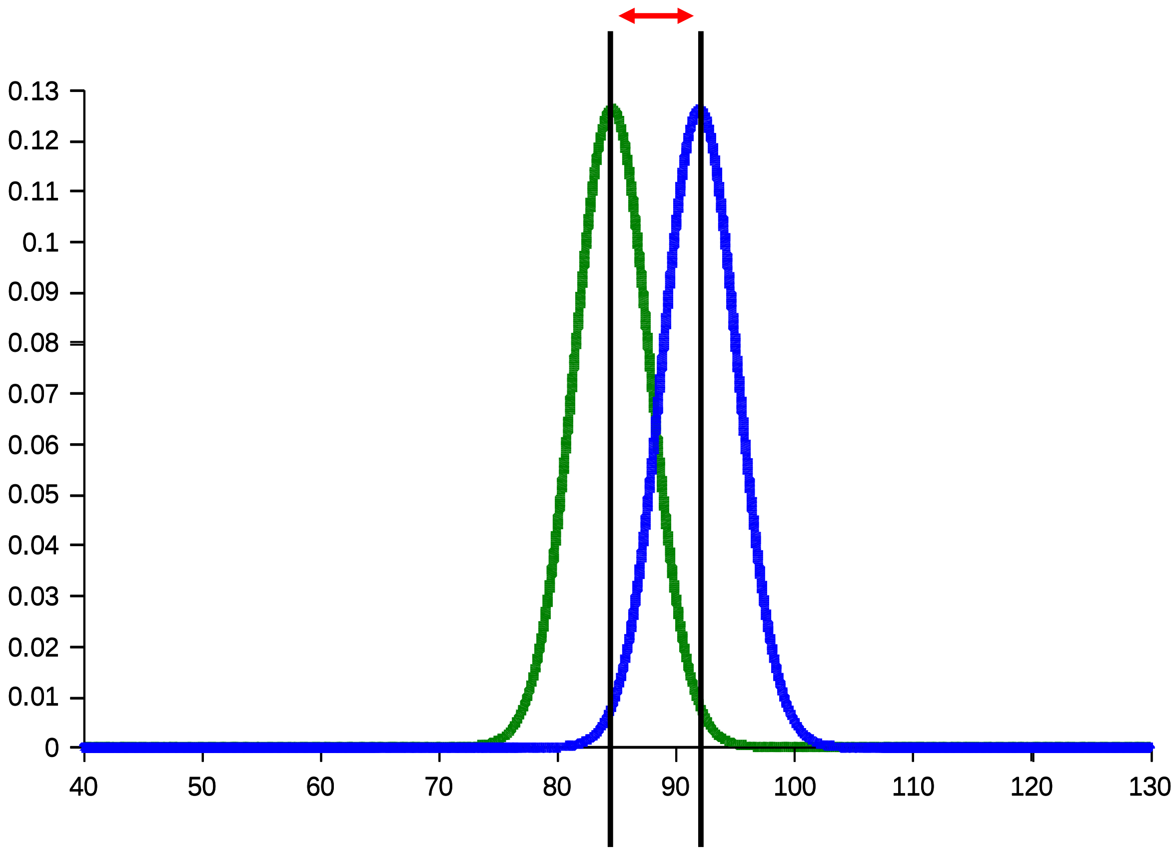
IV…

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observation
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques



m_{obs}=88,26

IV…

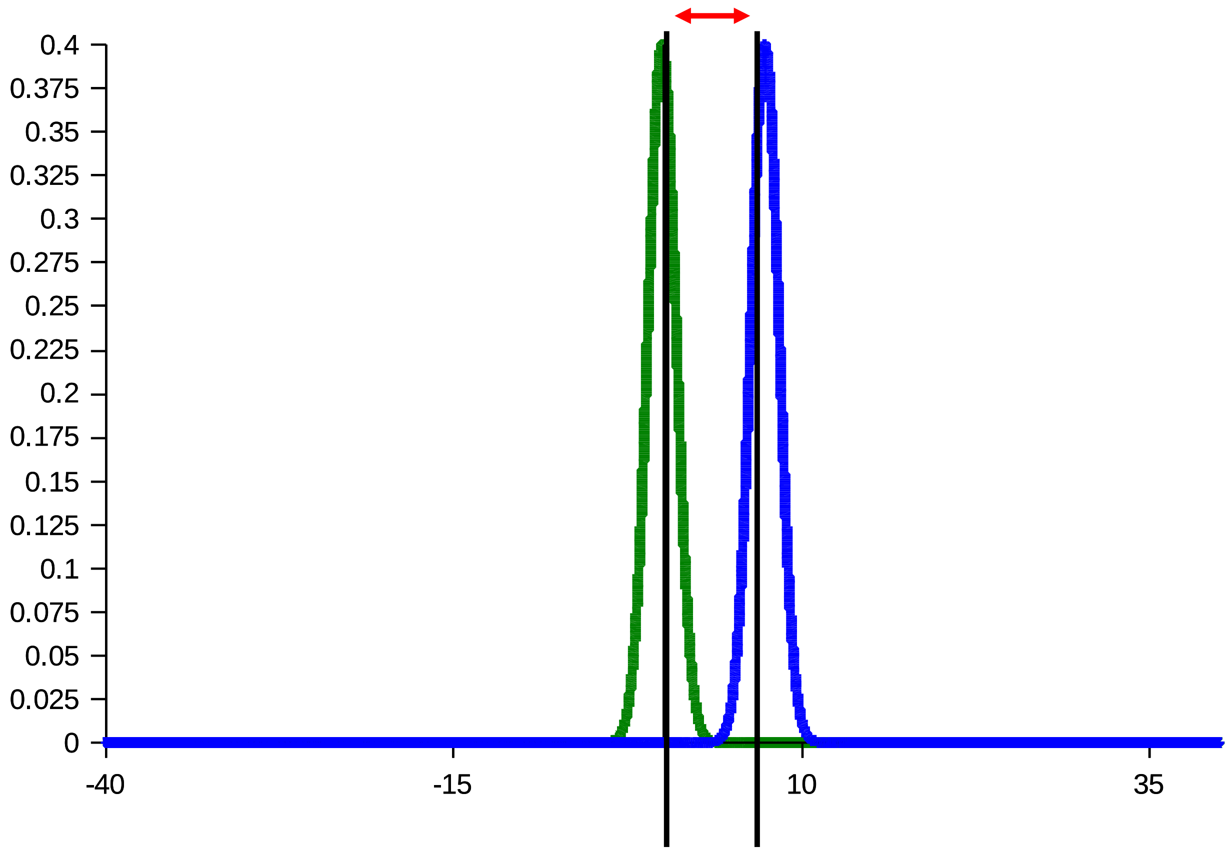


0.13
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130

m_{obs}=88,26

IV…

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observation
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques



$$m_{obs} - \mu_{H0} = 3{,}66$$

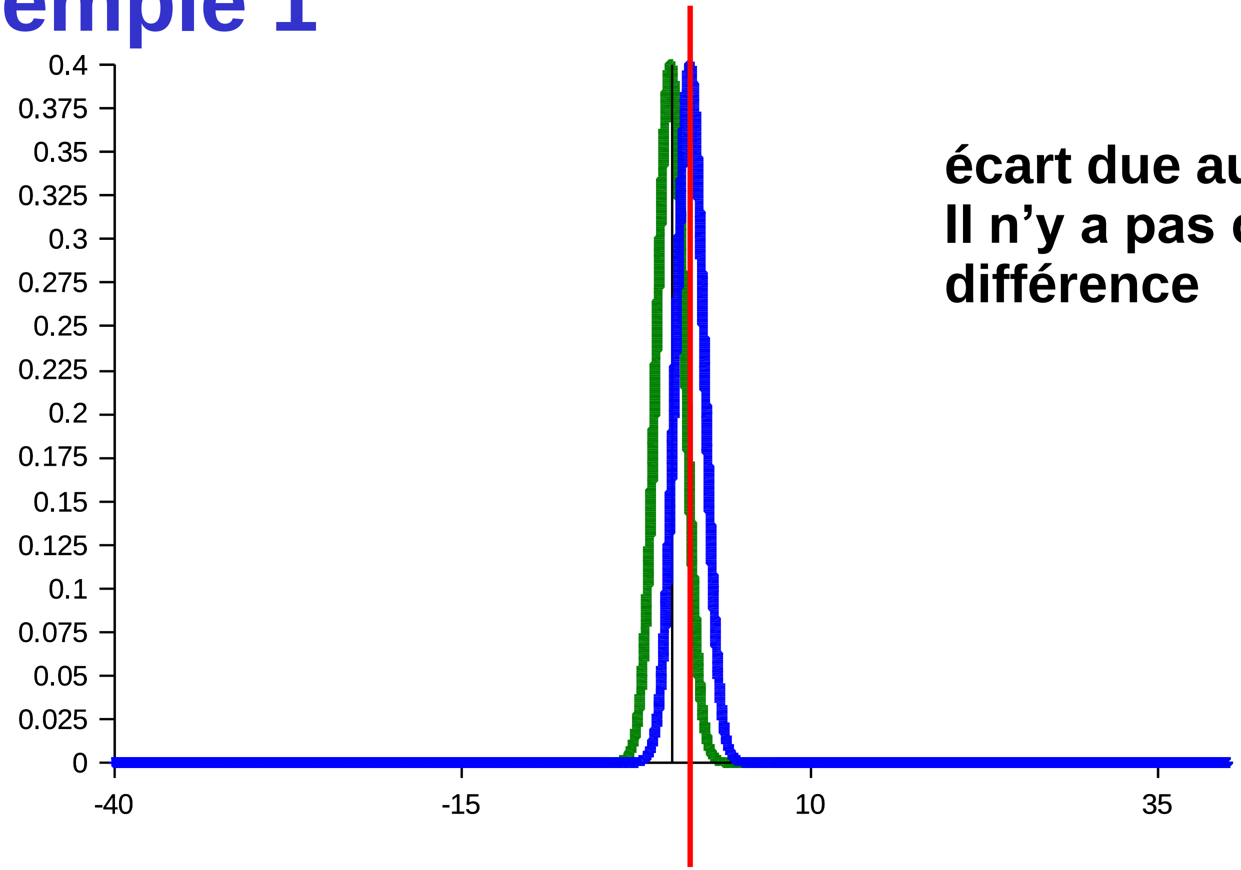
V. Confrontation

- **Sous H0: $\mu - \mu_{H0} = 0$**
- **On observe: $m_{obs} - \mu_{H0} = 3,66$**
- **Cet écart est-il due au hasard?**

fluctuations d'échantillonnage ?

V…

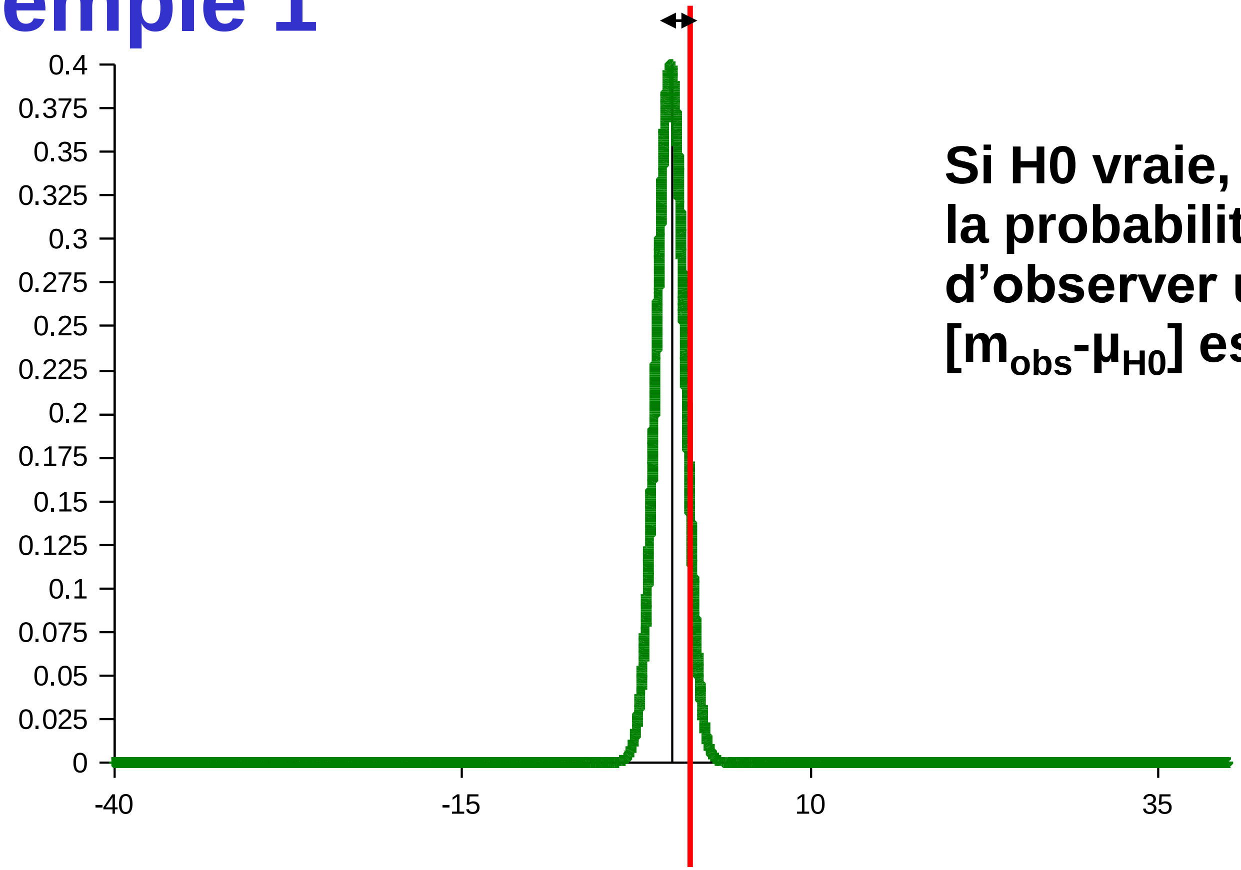
- **Exemple 1**



écart due au hasard, Il n'y a pas de vraie différence

V…

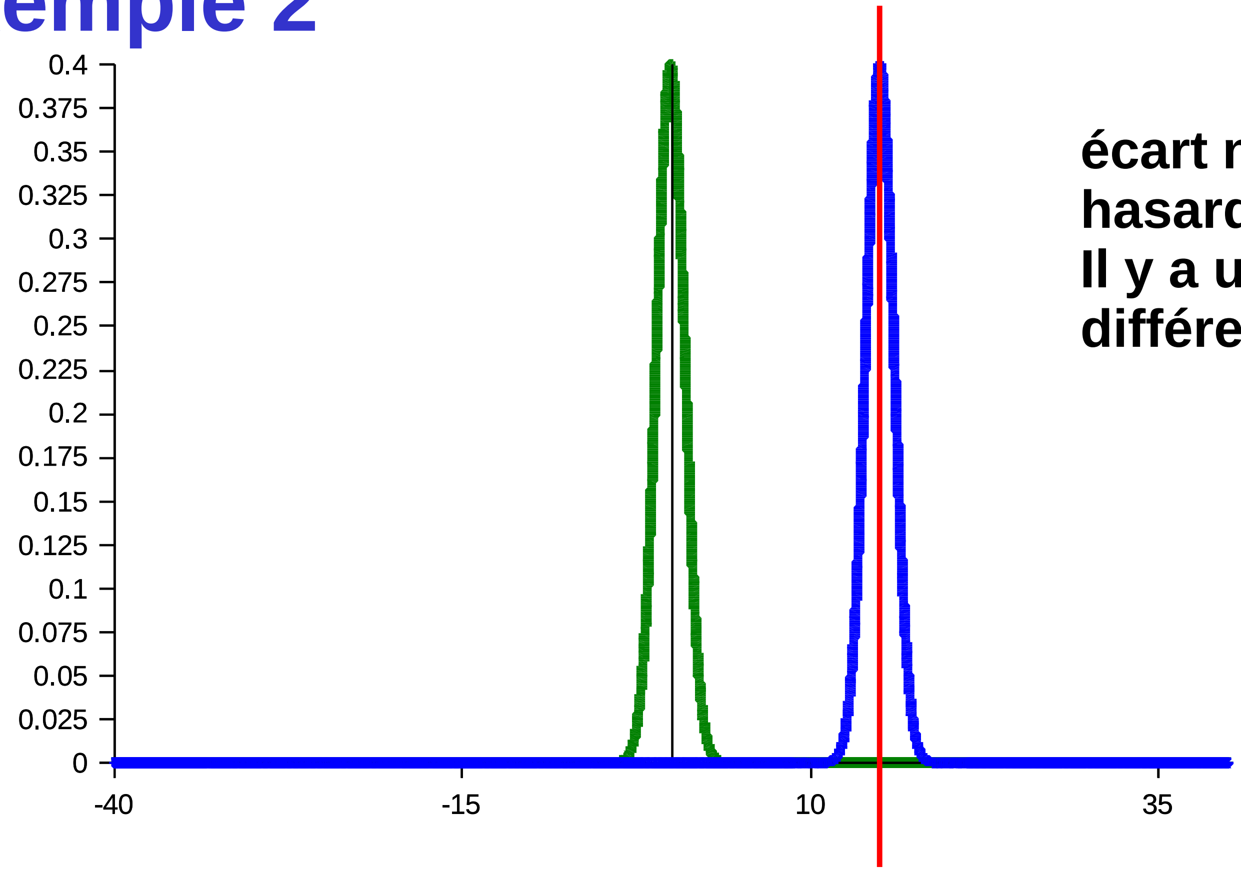
■Exemple 1



**Si H0 vraie,
la probabilité
d'observer un écart
[m_{obs}-μ_{H0}] est grande**

V…

▪Exemple 2

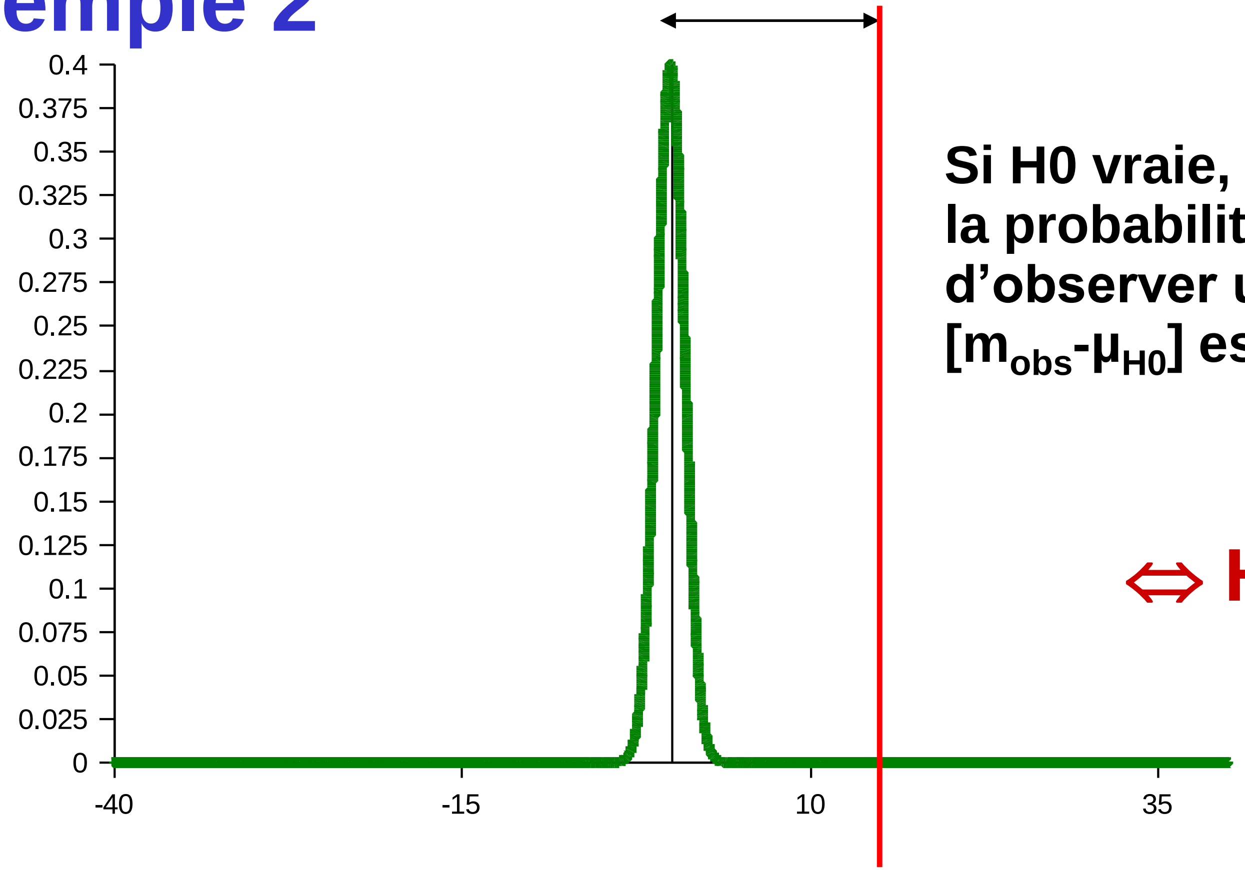


écart non due au hasard,
Il y a une vraie différence

V…

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

▪Exemple 2



**Si H0 vraie,
la probabilité
d'observer un écart
[m_{obs}-μ_{H0}] est petite**

⇔ H0 fausse

V…

- **Sous H0: $\mu-\mu_{H0}=0$**
- **On observe: $m_{obs}-\mu_{H0}=3{,}66$**
- **Cet écart est-il due au hasard?**

$$p[M>\mu]=p[M-\mu_{H0}>\mu-\mu_{H0}]=p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}}>\frac{\mu-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right]$$

$$=p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}}>\frac{88{,}26-84{,}6}{\sqrt{4{,}13/30}}\right]=p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}}>9{,}86\right]$$

$$\boxed{p[Z>9{,}86]<0{,}00001}$$

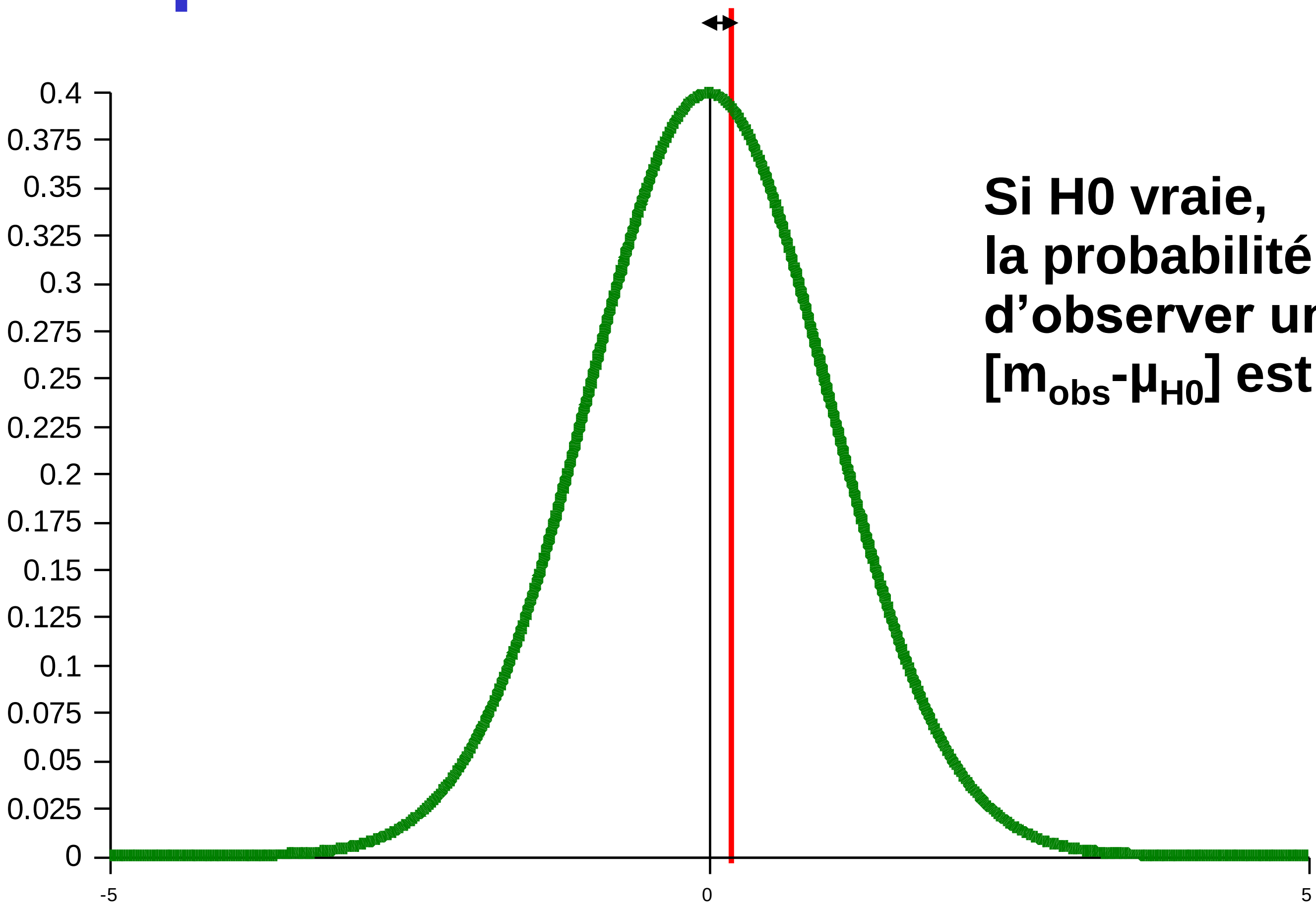
VI. Conclusion

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

- **Sous H0**, la probabilité d'un tel écart est **trop faible**: **p<0,05**
- Les observations sont **incompatibles avec H0**
- Le test est **significatif**
- On **rejette** H0 au risque 5%
- On **met en évidence** une différence significative entre la moyenne du tour de taille en 2006 et la référence (1997)
- Dans le **sens** "le tour de taille a augmenté"

VII. Risques

Exemple 1

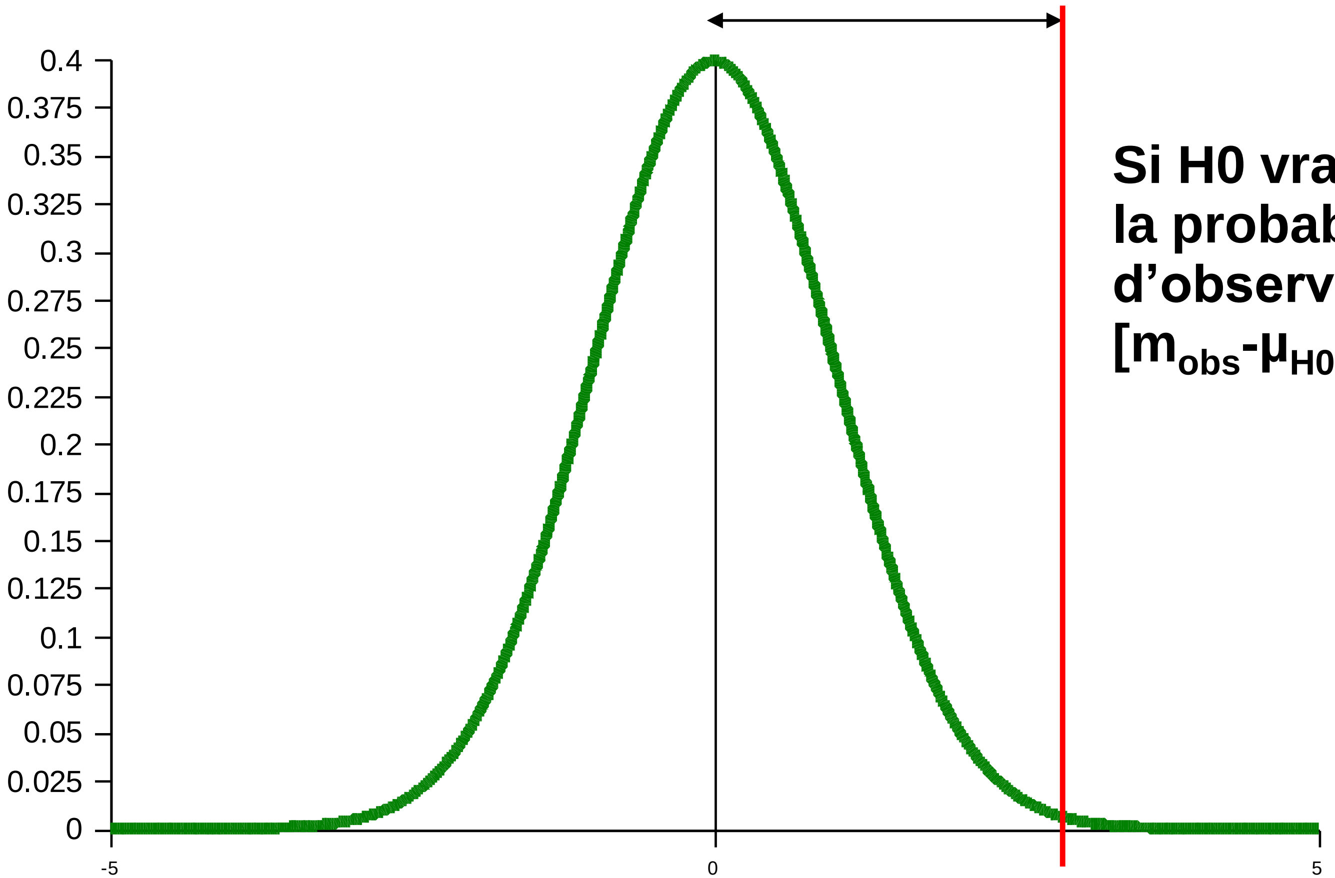


Si H0 vraie, la probabilité d'observer un écart $[m_{obs}-\mu_{H0}]$ est grande

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

VII…

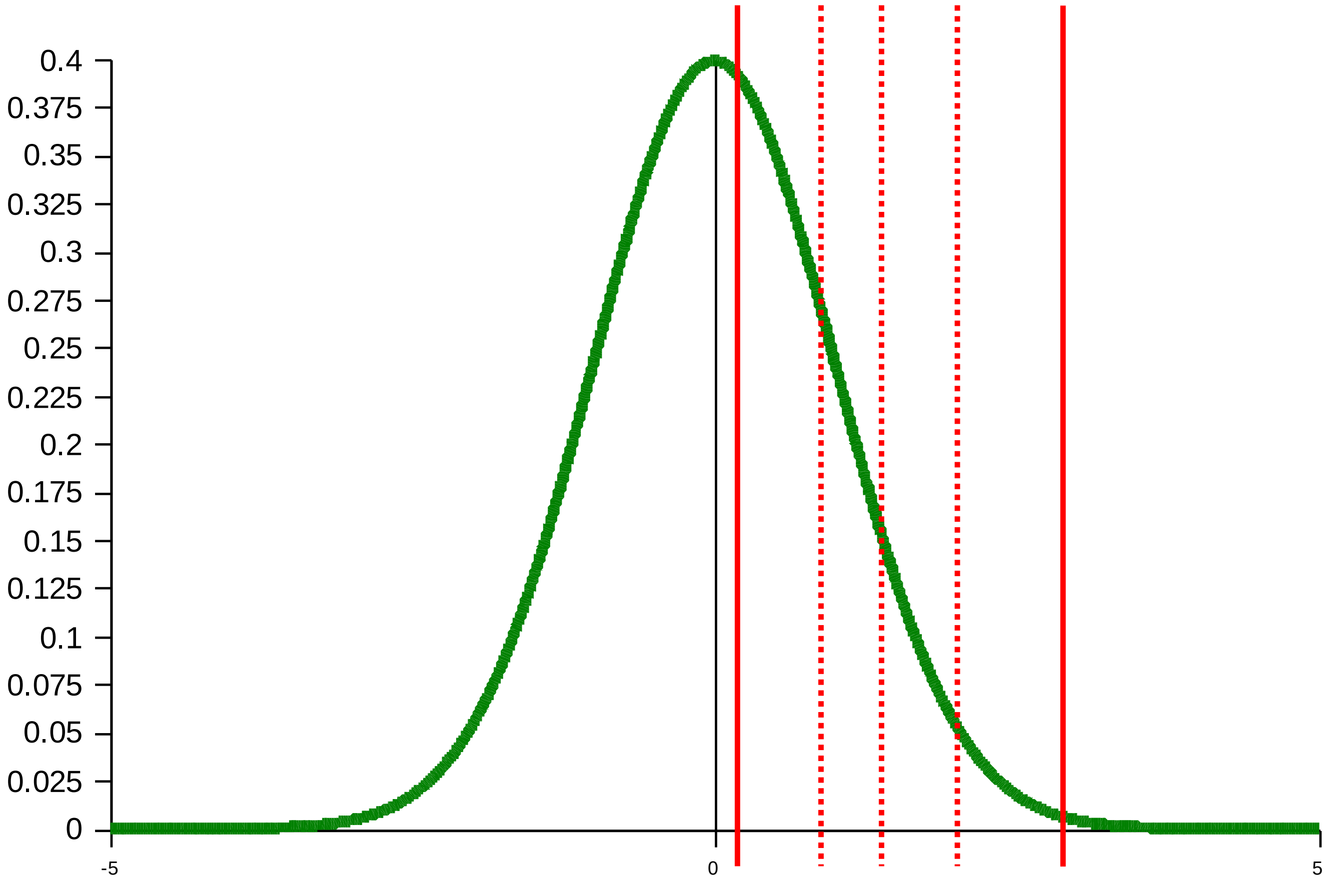
■ Exemple 2



Si H0 vraie,
la probabilité
d'observer un écart
[m_{obs}-μ_{H0}] est petite

VII…

- **Ecart Petit ? ↔ Grand ?**



VII…

- **Ecart trop grand pour H0**

$$p\left[\acute{e}cart\ grand\,/\,H0\ vraie\right] = petit$$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

VII…

- **Ecart trop grand pour H0**

$$p\left[\acute{e}cart\ grand\ /\ H0\ vraie\right] < \alpha$$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

VII…

- **Ecart trop grand pour H0**

$$p\left[\acute{e}cart\ grand / H0\ vraie\right] < \alpha$$

$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > valeur observée / H0\ vraie\right] < \alpha$$

VII…

- **Ecart trop grand pour H0**

$$p\left[écart\ grand\ /\ H0\ vraie\right] < \alpha$$

$$p\left[\frac{M-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{M_{obs}-\mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}}\ /\ H0\ vraie\right] < \alpha$$

Probabilité: fluctuations d'échantillonnage…

VII…

- **Risque de 1ère espèce**
  - **Si on observe un écart trop grand pour H0, à cause du hasard: Rejet à tort de H0**
  - **Ex:**
    - **Réalité: le tour de taille n'a pas changé**
    - **À cause du hasard, les observations (échantillon) sont grandes**
    - **Confrontation (calcul) ⇒ rejet de H0**
    - **Conclusion ⇒ "le tour de taille a changé"**
  - **Il faut maîtriser ce risque**

VII…

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

- **Risque de 1ère espèce**
  - **α:**
    - **Risque de rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à une différence entre l'hypothèse et l'observation**

VII…

- **Risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce**
  - **α:**
    - **Risque de rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à une différence entre l'hypothèse et l'observation**

$$\alpha = p[\text{rejet } H0 / H0 \text{ vraie}]$$

VII…

Risque de 1ère espèce

- α:
  - **Risque de rejeter H0 à tort**
  - **Risque de conclure à tort à une différence entre l'hypothèse et l'observation**

$$\alpha = p[\text{rejet } H0/H0 \text{ vraie}]$$

$$\alpha = p[\text{écart trop grand pour } H0/H0 \text{ vraie}]$$

VII…

Risque de 1ère espèce

- α:
  - **Risque de rejeter H0 à tort**
  - **Risque de conclure à tort à une différence entre l'hypothèse et l'observation**

α=p[rejet H0/H0 vraie]

α=p[écart trop grand pour H0/H0 vraie]

$$\alpha = p\left[\frac{M_{obs} - \mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} > seuil \,/\, H0vraie\right]$$

VII…

Risque de 1ère espèce

- α:
  - **Risque de rejeter H0 à tort**
  - **Risque de conclure à tort à une différence entre l'hypothèse et l'observation**

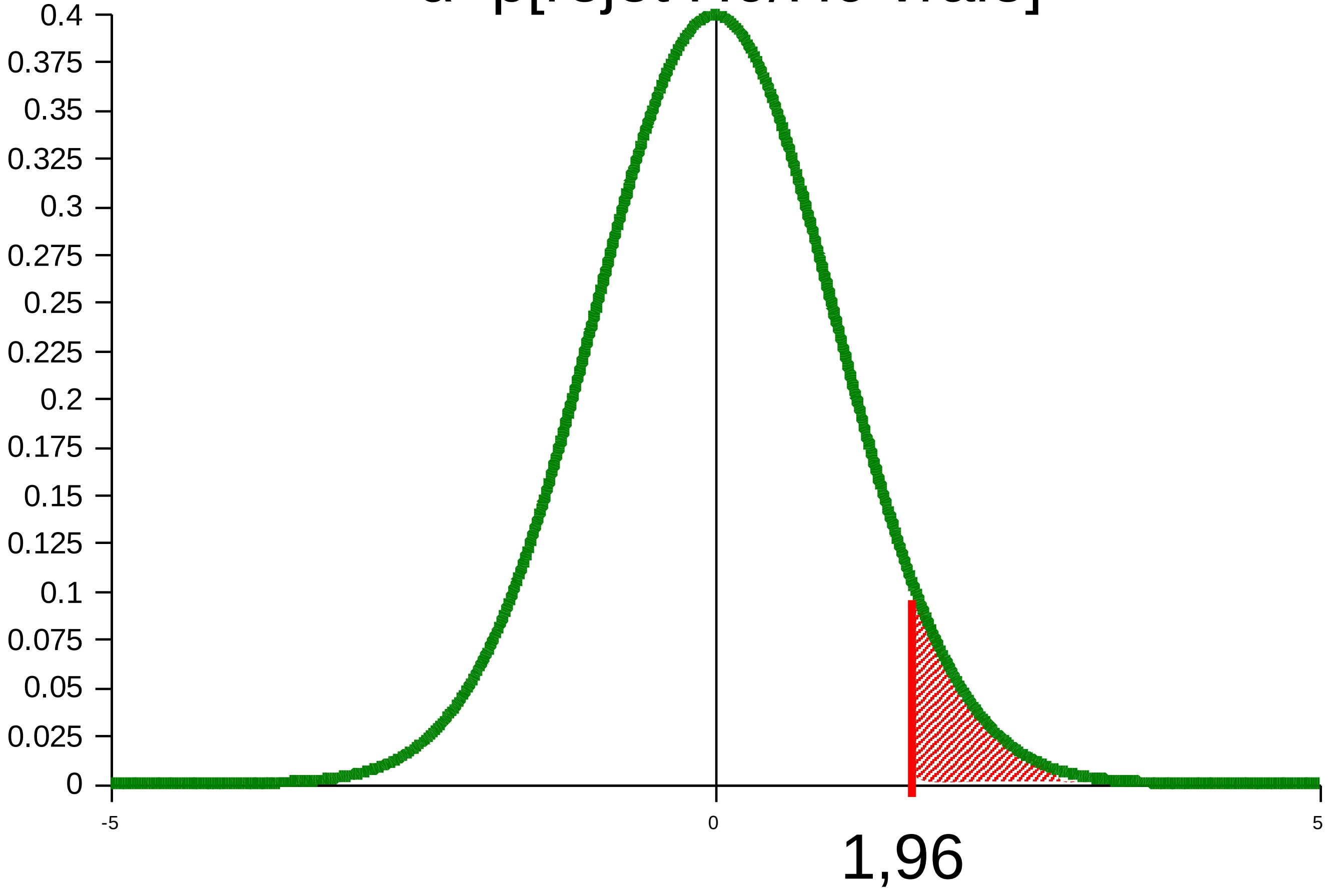
$$\alpha = p[\text{rejet } H0/H0 \text{ vraie}]$$

  - **Fixé: α=5%, seuil z=1,96**

VII…

■ Risque de 1ère espèce

α=p[rejet H0/H0 vraie]



VII…

- **Risque de $2^{\text{ième}}$ espèce**
  - **Si on observe un écart trop petit pour H1, à cause du hasard: non rejet à tort de H0**
  - **Ex:**
    - **Réalité: le tour de taille a changé**
    - **À cause du hasard, les observations (échantillon) sont petites**
    - **Confrontation (calcul) ⇒ non rejet de H0**
    - **Conclusion ⇒ “le tour de taille n’a pas changé”**

VII…

- **Risque de 2$^{\text{ième}}$ espèce**
  - **β:**
    - **Risque de ne pas rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à l’absence de différence entre l’hypothèse et l’observation**

VII…

- **Risque de 2^{ième} espèce**
  - **β:**
    - **Risque de ne pas rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à l'absence de différence entre l'hypothèse et l'observation**

$$\beta = p[\text{non rejet de H0/H0 fausse}]$$

VII…

- **Risque de 2ième espèce**
  - **β:**
    - **Risque de ne pas rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à l'absence de différence entre l'hypothèse et l'observation**

β=p[non rejet de H0/H0 fausse]

β=p[écart trop petit pour H1/H0 fausse]

VII…

- **Risque de 2^{ième} espèce**
  - **β:**
    - **Risque de ne pas rejeter H0 à tort**
    - **Risque de conclure à tort à l'absence de différence entre l'hypothèse et l'observation**

β=p[non rejet de H0/H0 fausse]

β=p[écart trop petit pour H1/H0 fausse]

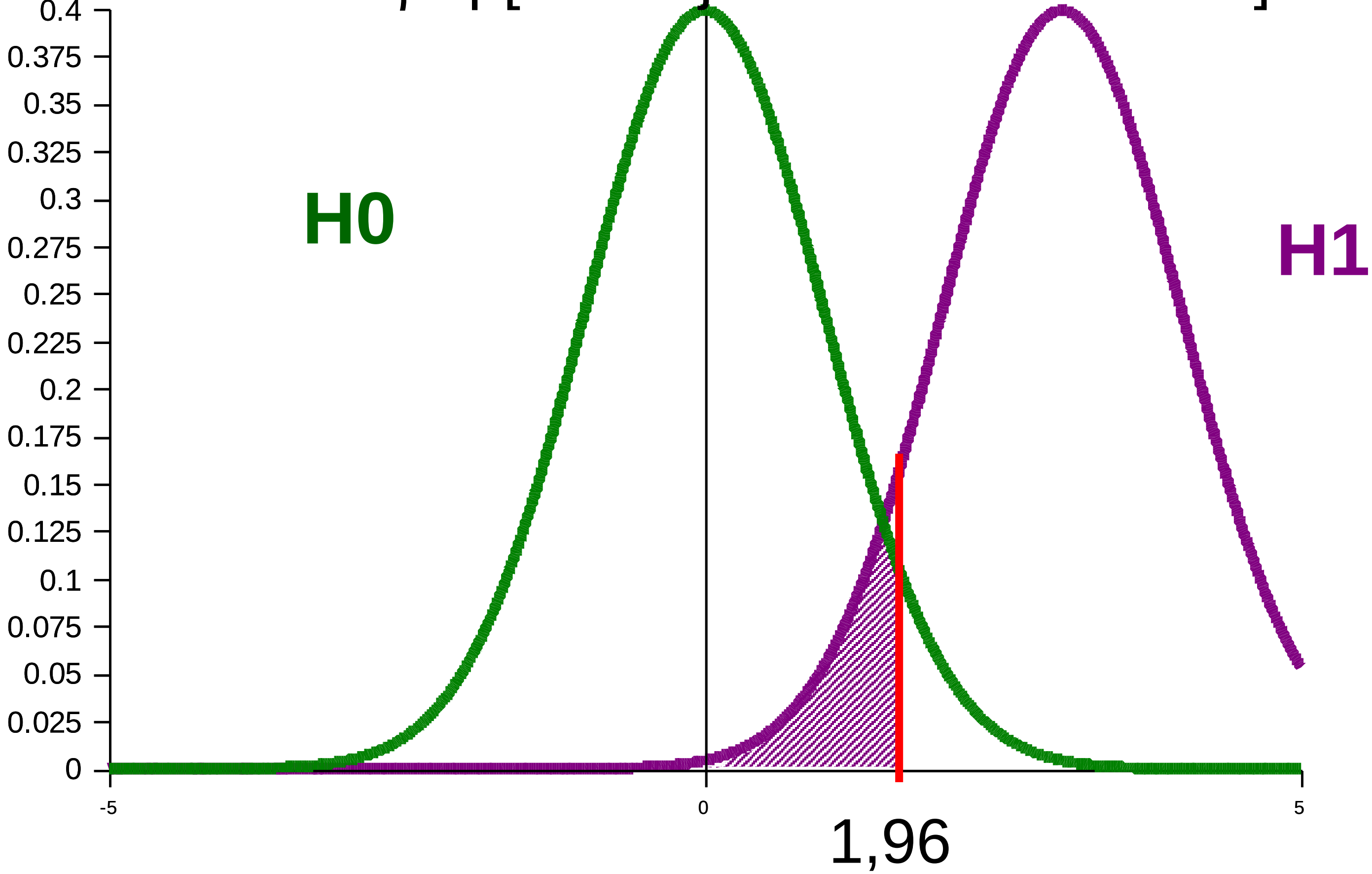
$$\beta = p\left[\frac{M_{obs} - \mu_{H0}}{\sqrt{\sigma^2/n}} < seuil \,/\, H0\, fausse\right]$$

1.Démarche
2.Hypothèses
3.Prédiction
4.Observations
5.Confrontation
6.Conclusion
7.Risques

VII…

■ Risque de 2ième espèce

β=p[non rejet de H0/H0 fausse]



VII…

$$p\left[test\,/\,réalité\right]$$

Test \ Réalité	H0 vraie	H0 fausse
H0 non rejetée	1-α	β
H0 rejetée	α	1-β

VII…

Conclusion d'un test statistique

- **p<0,05**
- **Le test est significatif**
- **Rejet de H0 au risque α=5%**
- **On met en évidence une différence entre la moyenne observée et la référence**
- **Dans le sens "le tour de taille de la population de 2006 est plus grande"**

VII…

Conclusion d'un test statistique

- $p<0,05$
- Le test est significatif
- Rejet de H0 au risque α=5%
- On met en évidence une différence entre la moyenne observée et la référence
- Dans le sens "le tour de taille de la population de 2006 est plus grande"

- $p>0,05$
- Le test n'est pas significatif
- Non Rejet de H0 au risque β
- On ne met pas en évidence de différence significative entre la moyenne observée et la référence

Références

- Jean Bouyer: *Méthodes statistiques, Médecine-Biologie*, éditions INSERM

- Coll. (CIMES): *Biostatistiques*, éditions Omnisciences

Contact

jean.gaudart@univ-amu.fr

http://sesstim.univ-amu.fr

Faculté de Médecine de Marseille