Rappels

Principes Généraux des Tests Statistiques

Pr Roch Giorgi

@ roch.giorgi@univ-amu.fr

SESSTIM, Faculté de Médecine, Aix-Marseille Université, Marseille, France
http://sesstim.univ-amu.fr/

Position du Problème : Exemple (1)

- Théorique
  - ✓ Réglage de la machine $\Rightarrow$ quantité μ de produit actif dans chaque gélule
- Réalité
  - ✓ Quantité de produit actif est un v.a. $N(\mu,\sigma)$ avec σ connu
- Question
  - ✓ La machine est-elle réglée correctement et délivre t-elle bien la quantité 'a' de produit actif ?

Position du Problème : Exemple (2)

- Expérience
  - ✓ Échantillon pris au hasard de n gélules et mesure (sans erreur) de la quantité de produit actif $\Rightarrow \bar{x}$ quantité moyenne de produit actif observée
- Si le réglage est bon
  - ✓ La quantité moyenne de produit actif est toujours $\mu = a$
- Si le réglage est mauvais
  - ✓ La quantité moyenne de produit actif est $\mu \neq a$

Réalisation d'un test de comparaison d'une moyenne observée à une constante

Position du Problème : Exemple (3)

- Toute mesure effectuée sur un échantillon pris au hasard étant soumise aux fluctuations d'échantillonnage, on peut avoir

	Réglage bon	Réglage mauvais
Quantité moyenne de produit actif théorique	$\mu = a$	$\mu \neq a$
Quantité moyenne de produit actif observée sur échantillon	$\overline{x} \approx a$	$\overline{x} \neq a$
Valeurs possibles de $\overline{x}$ observées sur échantillon	$0 \rightarrow \infty$	$0 \rightarrow \infty$

Position du Problème : Exemple (4)

- Incertitude pour répondre à la question « le réglage est-il bon au mauvais »
- Réponse possible en acceptant un certain risque d'erreur
- De manière intuitive
  - ✓ Le réglage est mauvais si l'écart entre $\bar{x}$ et 'a' est « grand »

Un test de comparaison permet d'associer au qualificatif « grand » un risque d'erreur connu et accepté

Méthode Classique d'un Test Statistique (1)

- Quantité théorique de produit actif dans une gélule = 'a'
- Échantillon au hasard de 100 gélules
- Quantité observée moyenne de produit actif 'a' = $\overline{x}$ (mesurée sans erreurs)

1. Définir H_0 : Hypothèse nulle que l'on cherche à tester
   - ✓ $H_0 : \mu = a \Leftrightarrow \mu - a = 0$
   - ✓ D : v.a. de la différence et sa réalisation est $d = \overline{x} - a$

Méthode Classique d'un Test Statistique (2)

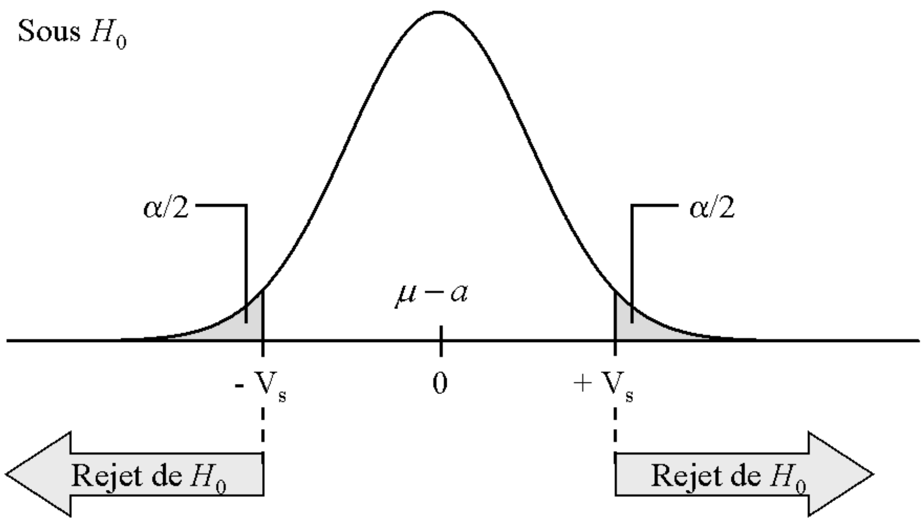
- Quantité théorique de produit actif dans une gélule = 'a'
- Échantillon au hasard de 100 gélules
- Quantité observée moyenne de produit actif 'a' = $\overline{x}$ (mesurée sans erreurs)

1. Définir H_0
2. Fixer le risque d'erreur global acceptable du test dans l'hypothèse où H_0 est vraie
   - ✓ $\alpha = 5\ \%$

Méthode Classique d'un Test Statistique (3)

- Quantité théorique de produit actif dans une gélule = 'a'
- Échantillon au hasard de 100 gélules
- Quantité observée moyenne de produit actif 'a' = $\overline{x}$ (mesurée sans erreurs)

1. Définir H_0
2. Fixer le risque d'erreur global sous H_0 : α = 5 %
3. Sous H_0 on peut définir une valeur seuil $|V_s|$



Méthode Classique d'un Test Statistique (4)

- Quantité théorique de produit actif dans une gélule = 'a'
- Échantillon au hasard de 100 gélules
- Quantité observée moyenne de produit actif 'a' = $\overline{x}$ (mesurée sans erreurs)

1. Définir H_0
2. Fixer le risque d'erreur global sous H_0 : α = 5 %
3. Sous H_0 on peut définir une valeur seuil $|V_s|$
4. Calcul de la statistique du test de comparaison d'une moyenne à une constante : δ
   - ✓ Si $\delta \in$ à une des régions de rejet : rejet de H_0
   - ✓ Si $\delta \notin$ à une des régions de rejet : H_0 n'est pas rejetée

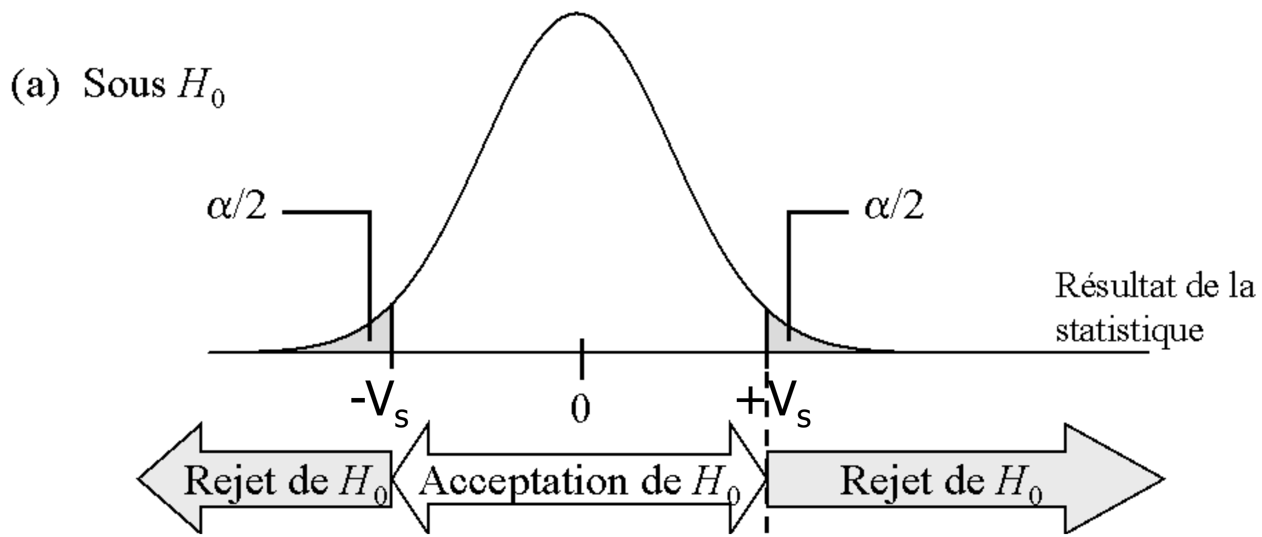
Méthode Classique d'un Test Statistique (5)

- Avec la « méthode classique », la conclusion au test statistique repose sur la comparaison entre la valeur du résultat de la statistique du test et la valeur seuil

- Rejet de H_0 si
  - |résultat de la statistique du test| ≥ |valeur seuil|

- Conservation de H_0 si
  - |résultat de la statistique du test| < |valeur seuil|

Notion de Risque (1)



- Seuil de signification : valeur V_s correspondant au risque de rejeter H_0 quand celle-ci est vraie
- Erreur de 1ère espèce : rejeter H_0 quand celle-ci est vraie = risque d'erreur α = risque de 1ère espèce

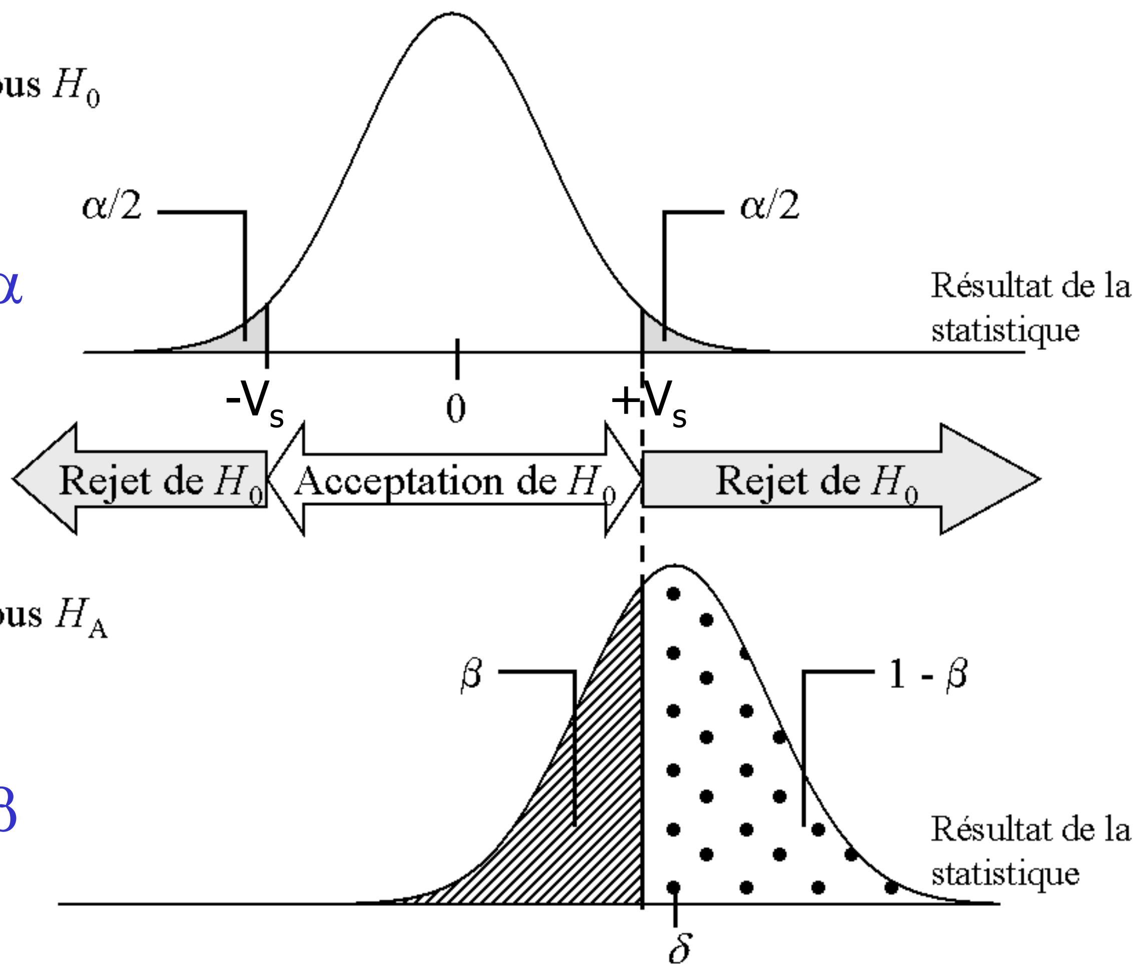
Notion de Risque (2)

- Rejet de H_0 au bénéfice d'une hypothèse alternative : H_A
- Comme sous H_0, la v.a. D suis sous H_A une certaine loi de distribution
- Erreur possible : le résultat de la statistique est dans la zone d'acceptation de H_0 alors que H_A est vraie
- Erreur de 2ème espèce : accepter H_0 alors qu'elle est fausse = risque de 2ème espèce

Notion de Risque (3)

Risque α

Risque β



Notion de Risque (4)

		Réalité (inconnue)	
		H_0 vraie	H_A vraie
Décision retenue au vue du résultat de la statistique	H_0 vraie		
	H_A vraie	Risque α	

Rejet de H_0 quand H_0 est vraie

Notion de Risque (4)

		Réalité (inconnue)	
		H_0 vraie	H_A vraie
Décision retenue au vue du résultat de la statistique	H_0 vraie		Risque β
	H_A vraie	Risque α	

Acceptation de H_0 quand H_0 est fausse

Notion de Risque (4)

		Réalité (inconnue)	
		H_0 vraie	H_A vraie
Décision retenue au vue du résultat de la statistique	H_0 vraie	Pas d'erreur	Risque β
	H_A vraie	Risque α	

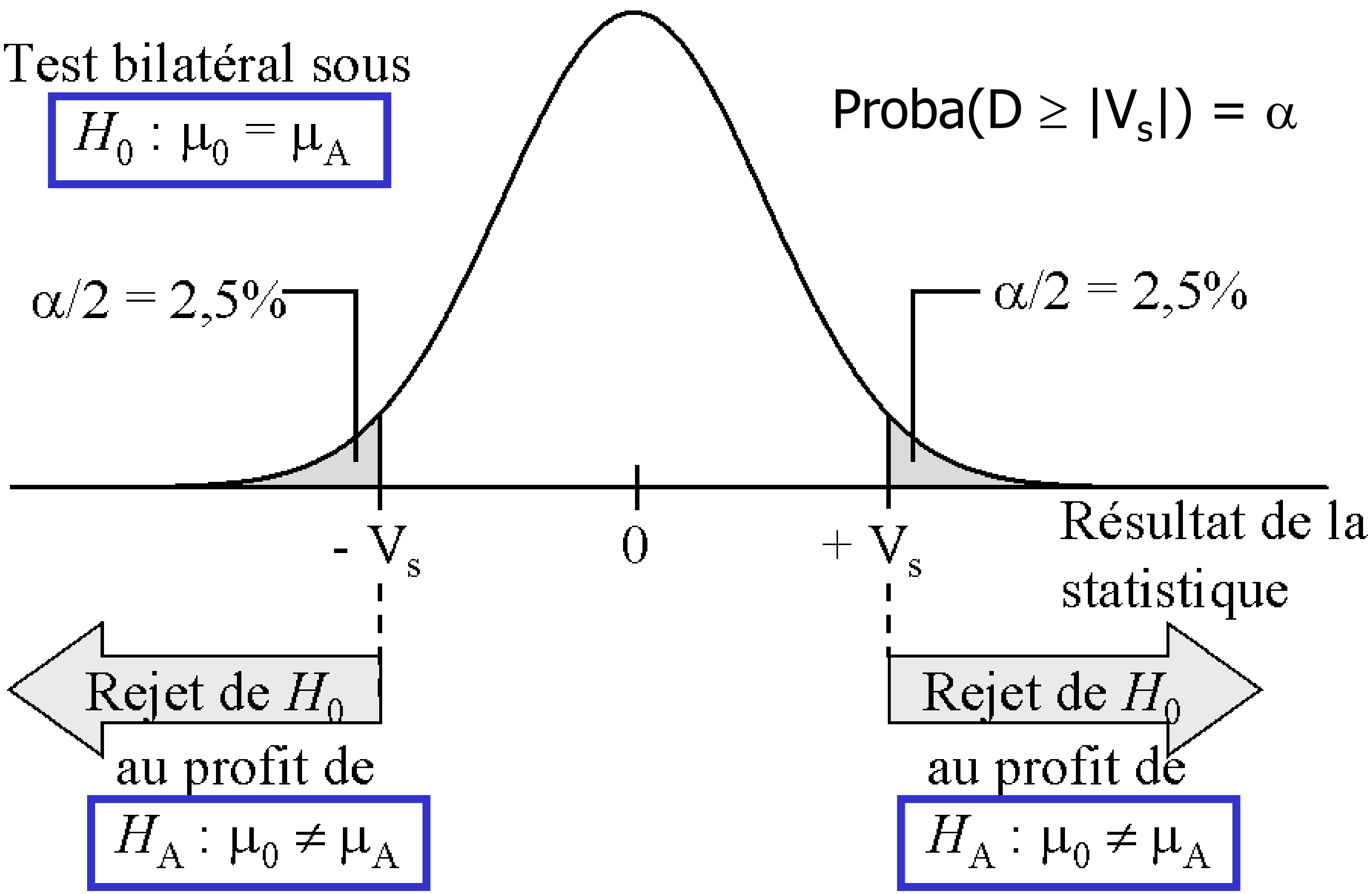
Notion de Risque (4)

		Réalité (inconnue)	
		H_0 vraie	H_A vraie
Décision retenue au vue du résultat de la statistique	H_0 vraie	Pas d'erreur	Risque β
	H_A vraie	Risque α	Pas d'erreur

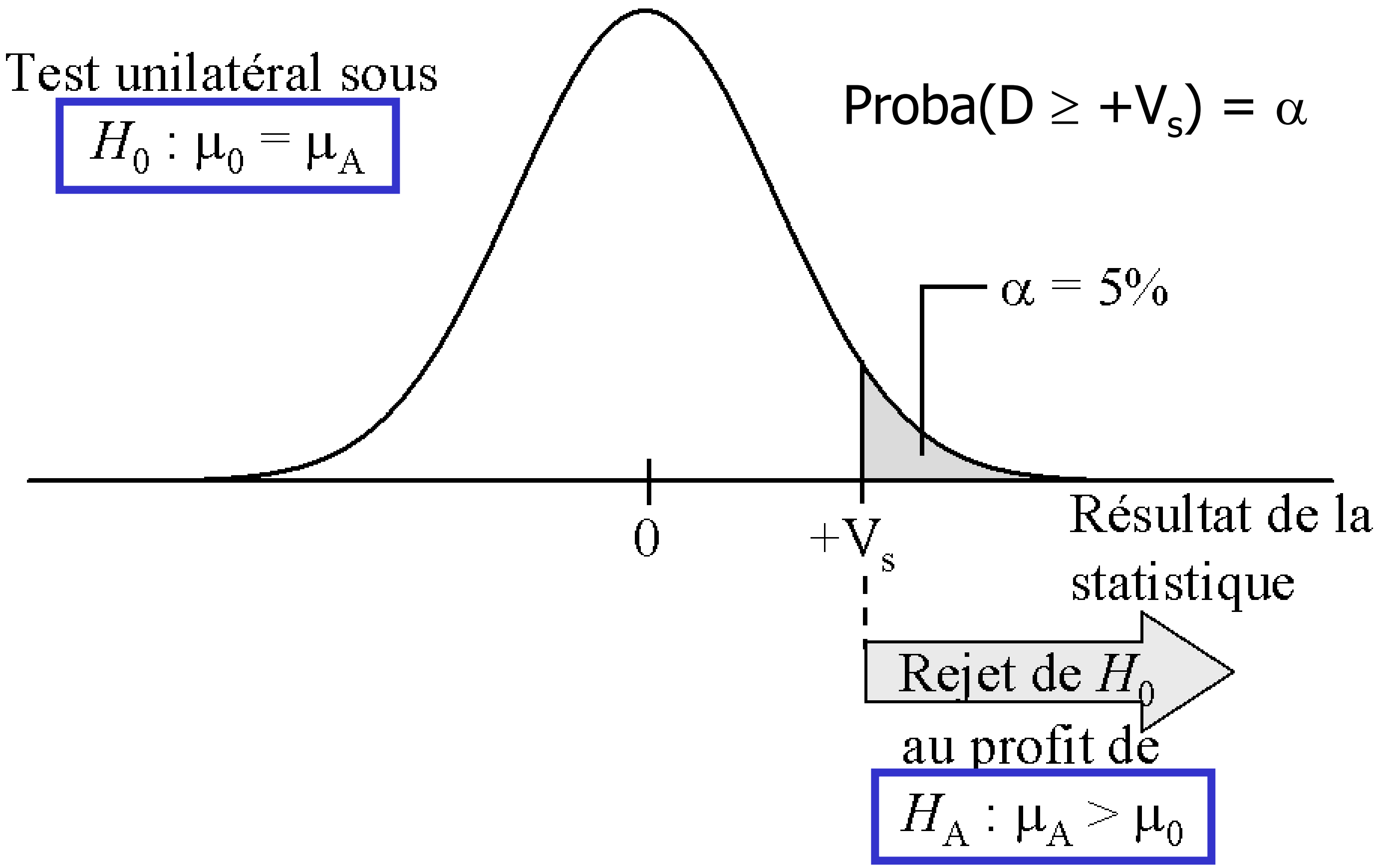
Puissance : $1 - \beta$

Rejet de H_0 quand H_0 est fausse

Test bilatéral



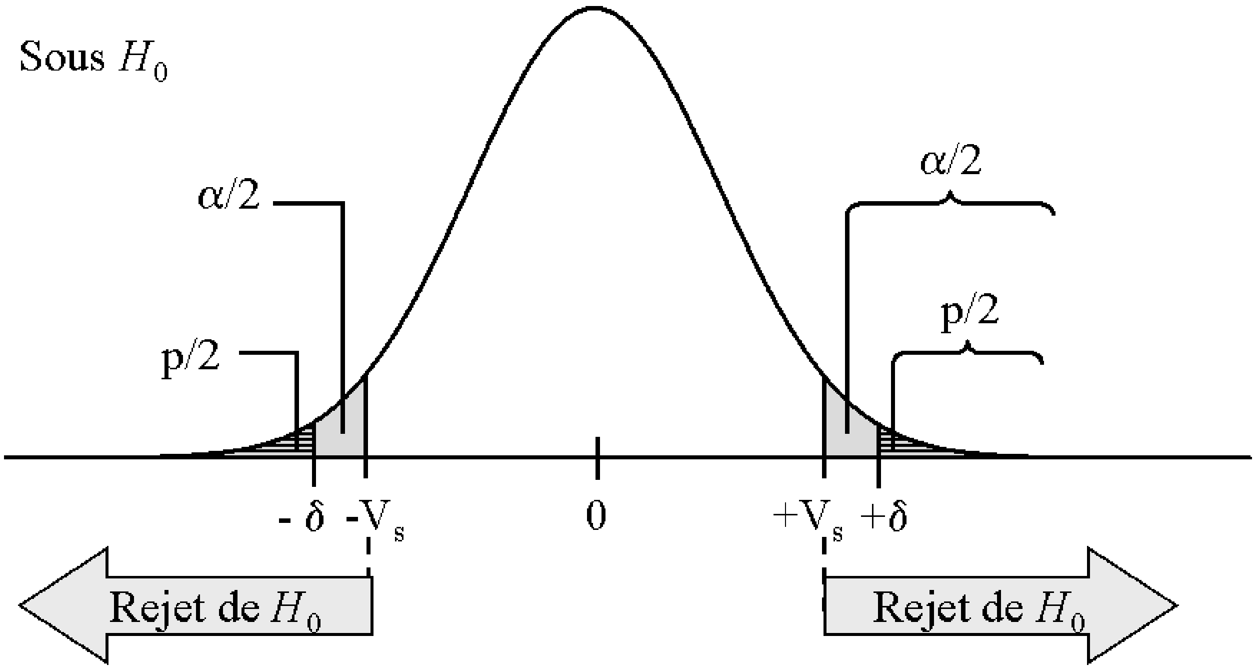
Test Unilatéral



Degré de Signification d’un Test (1)

- Méthode classique
  - ✓ Comparaison du résultat de la statistique avec la valeur seuil
  - ✓ Fonction d’un risque d’erreur α fixé a priori et arbitrairement
- Calcul du degré de signification
  - ✓ Quantifie la crédibilité de H_0 au vue des données observées
  - ✓ p : probabilité d’observer une différence au moins aussi importante que celle observée sous H_0

Degré de Signification d'un Test (2)



- p = Proba(valeur de la statistique ≥ valeur calculée si H_0 est vraie)

Degré de Signification d’un Test (3)

- La conclusion au test statistique repose sur la comparaison entre la valeur du degré de signification et la valeur de α

- Rejet de H_0 si
  - $p < \alpha$

- Conservation de H_0 si
  - $p \geq \alpha$

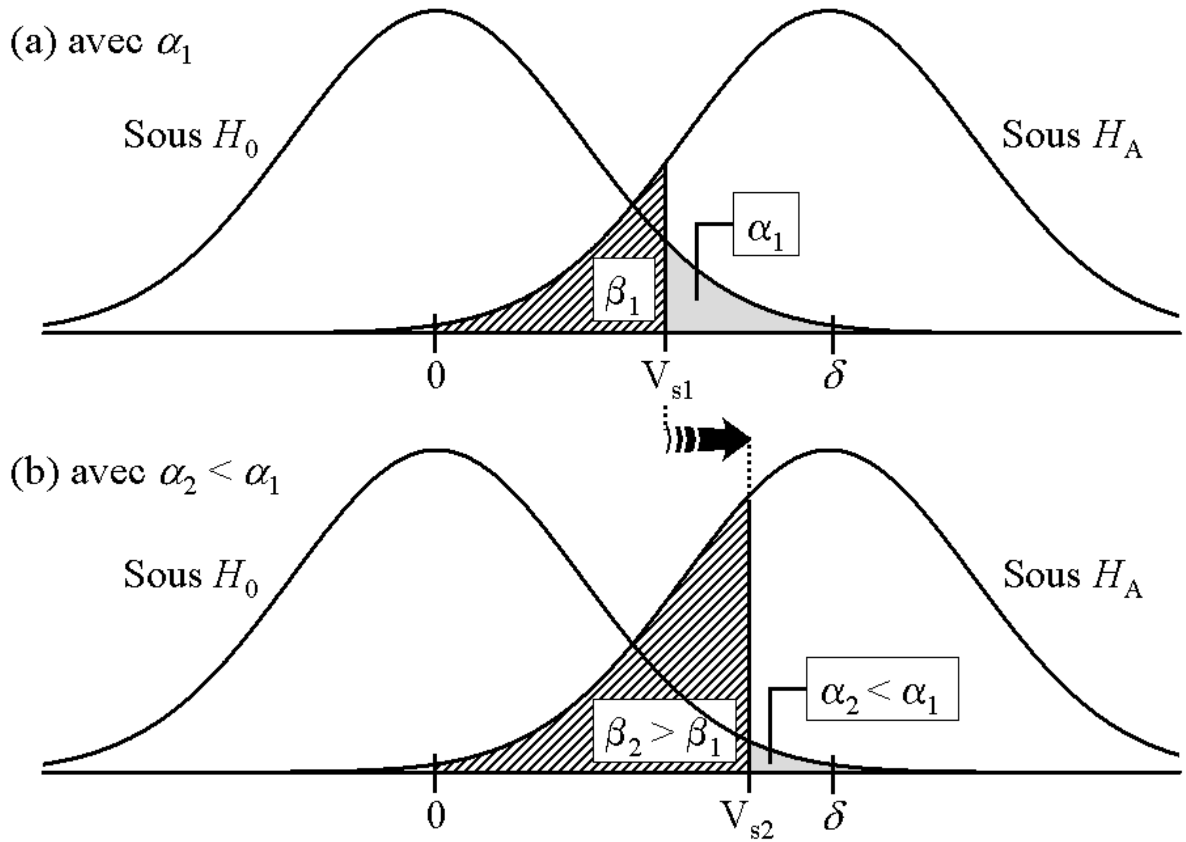
- En général on conclu avec un risque d’erreur α et on donne le degré de signification p

Degré de Signification : Remarques

- $p < \alpha \Leftrightarrow$ valeur calculée de la statistique > valeur seuil
- Valeur calculée de la statistique ↘ $\Rightarrow$ ↗ p
- p n'est pas le risque ou la probabilité de rejeter à tord l'hypothèse nulle
- p traduit en terme de probabilité l'éloignement entre la valeur observée de la statistique et la valeur attendue sous H_0
- p ne s'interprète pas en terme de force de différence
- p ↘ quand écart entre la réalité et H_0 est grand, puissance élevée, les deux, hasard (risque α)

Variation de β en Fonction de α

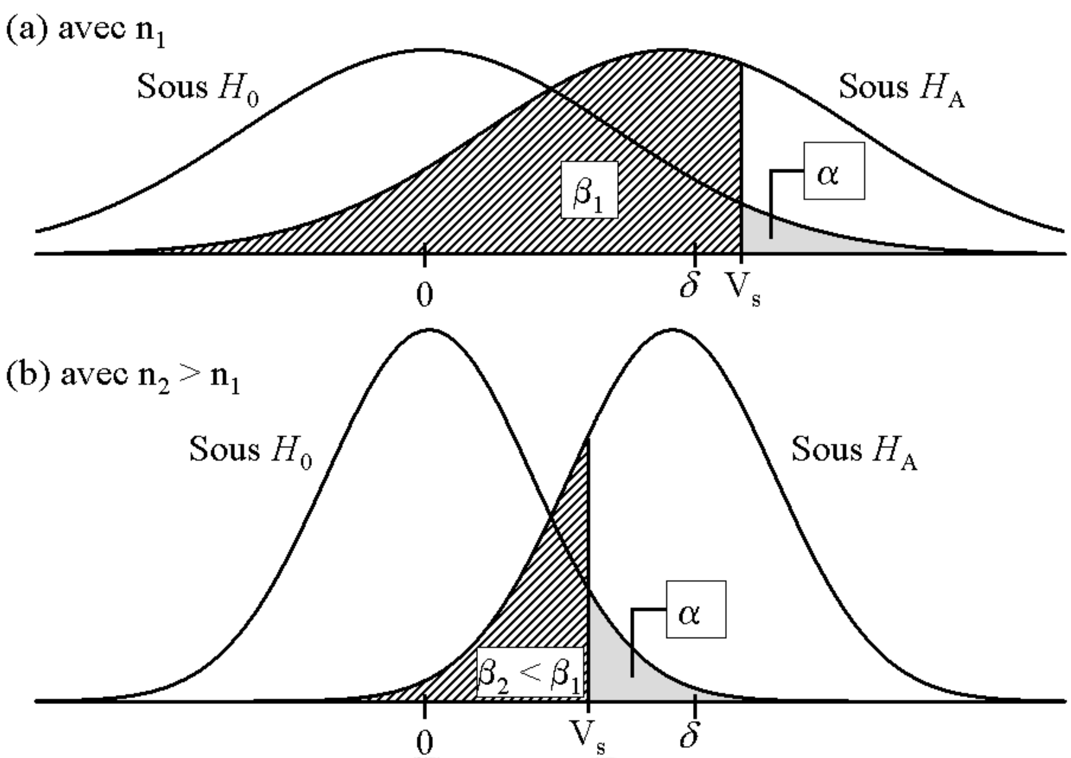
- Même test réalisé au risque $\alpha 1$ et au risque $\alpha 2$ ($\alpha_1 < \alpha_2$)



Toute chose égale par ailleurs, β et α varient en sens inverse

Variation de β en Fonction de n

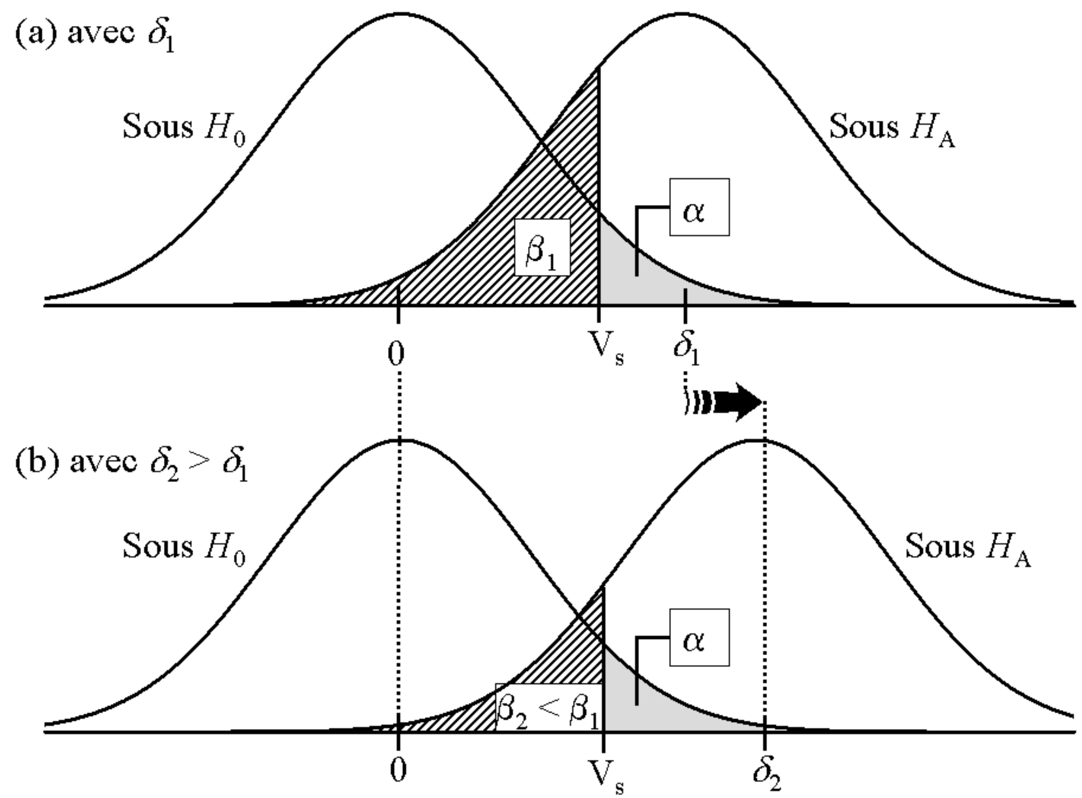
- Échantillons de taille n_1 et n_2 ($n_2 > n_1$)



- Toute chose égale par ailleurs, β et n varient en sens inverse

Variation de β en Fonction de l'Écart H_0 - H_A

- 2 tests réalisés et l'écart H_0 - H_A du 2ème test est supérieur à celui obtenu lors du premier test



Toute chose égale par ailleurs, β et l'écart H_0 - H_A varient en sens inverse

Récapitulatif

- La puissance d'un test statistique augmente (β diminue) quand
  - ✓ α augmente
  - ✓ n augmente
  - ✓ L'écart $\Delta = H_0 - H_A$ augmente

Choix d’un Test Statistique

1. Type de variables mises en relation
2. Taille de l’échantillon
3. Conditions d’applications des tests choisis
4. Séries non appariées ou appariées

Étapes d'un Test Statistique

1. Choix des hypothèses à tester
2. Fixer un règle pour décider l'acceptation ou le rejet de H_0
3. Vérifier les conditions d'application
4. Calcul de la statistique appropriée
5. Décision
6. Calcul du degré de signification du test
7. Interprétation des résultats