

Probabilités

Variables Aléatoires

Lois de Distribution

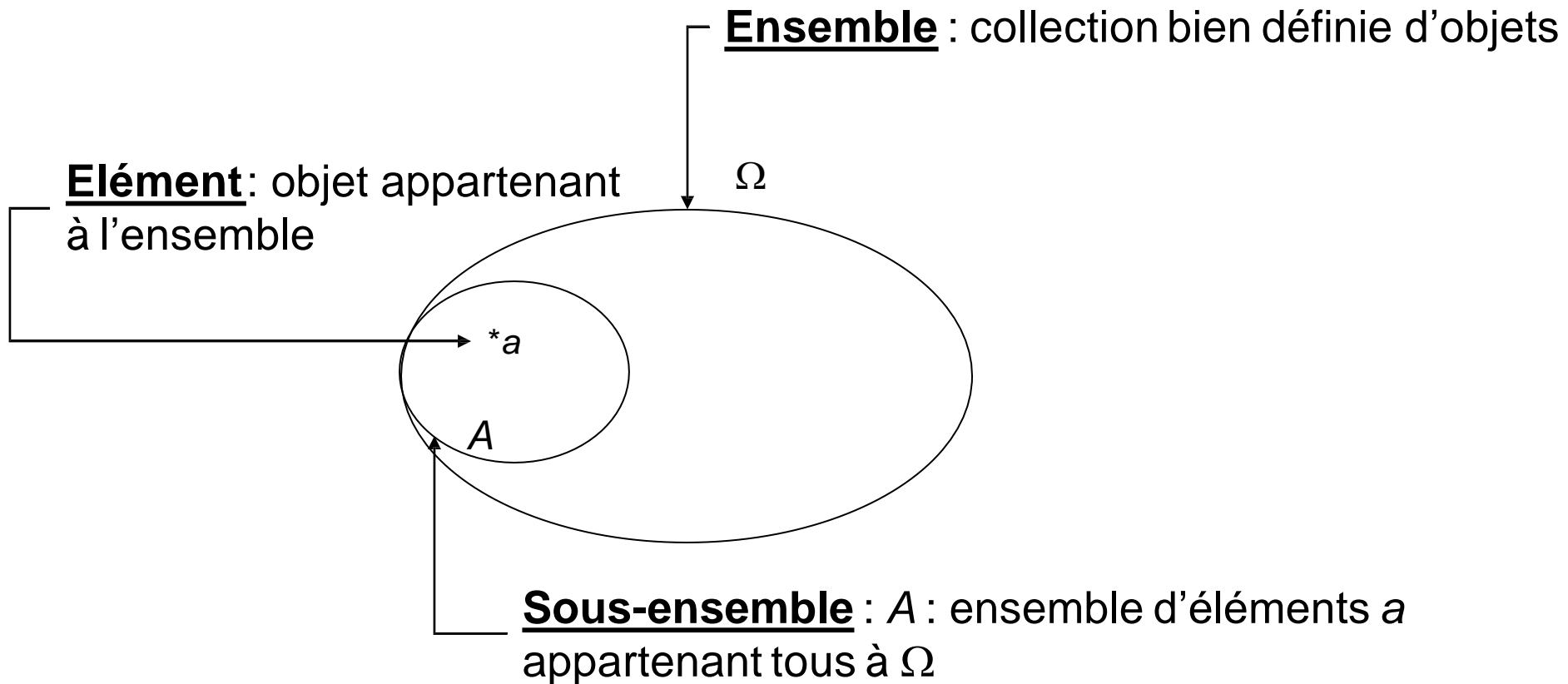
Pr Roch Giorgi

 roch.giorgi@univ-amu.fr

Introduction

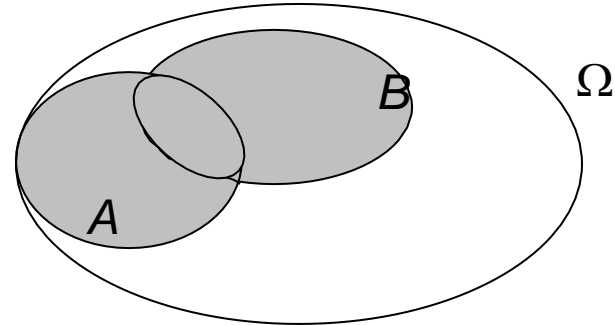
- **Probabilité** : modélise des phénomènes **aléatoires** dont les issues sont connues mais dont on ne peut en prédire la valeur car leur **réalisation** est **incertaine**
- Observation des issues d'un phénomène aléatoire sur des séries suffisamment grandes permet d'en déterminer leurs **fréquences** et par la suite la **loi de distribution** qui le dirige

Rappels sur les Ensembles

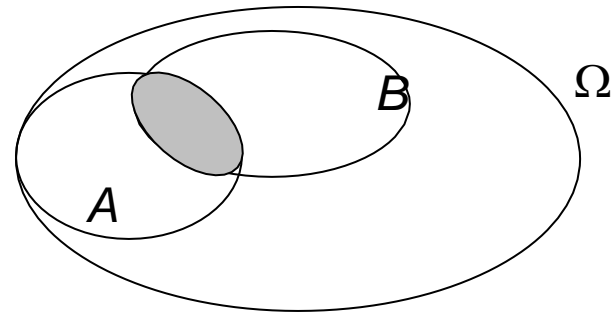


Rappels sur les Ensembles

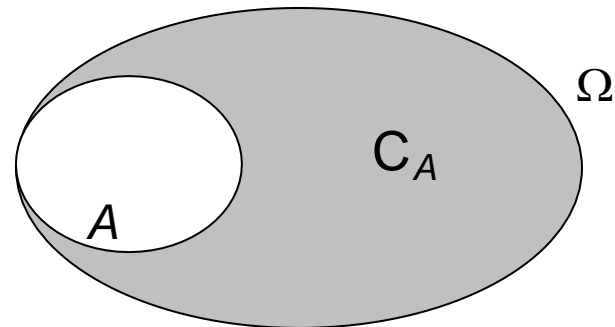
Réunion : $A \cup B \Leftrightarrow A \text{ ou } B$



Intersection : $A \cap B \Leftrightarrow A \text{ et } B$
si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B
sont
disjoints.



Complémentarité : C_A



Exemple

Expérience aléatoire d'un jet de dé non pipé à 6 faces

Ensemble fondamental : $\Omega = \{f1, f2, f3, f4, f5, f6\}$

Événement A : face de nombre $\leq 2 = f1 \cup f2$

Événement B : face de nombre $\geq 5 = f5 \cup f6$

Événement C : face de nombre paire $\{2, 4, 6\} = f2 \cup f4 \cup f6$

$$A \cup B = f1 \cup f2 \cup f5 \cup f6, A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup C = f1 \cup f2 \cup f4 \cup f6, A \cap C \neq \emptyset$$

Notion de Probabilité

Épreuve répétée n fois



	f1	f2	f3	f4	f5	f6	Total
Fréquences Absolues	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n
Fréquences Relatives	n_1/n	n_2/n	n_3/n	n_4/n	n_5/n	n_6/n	1

$$\text{Freq}(A) = (n_1 + n_2)/n$$

$$\text{Freq}(A \cup B) = (n_1 + n_2 + n_5 + n_6)/n = (n_1 + n_2)/n + (n_5 + n_6)/n = \text{Freq}(A) + \text{Freq}(B)$$

$$\text{Freq}(A \cup C) = (n_1 + n_2 + n_4 + n_6)/n \neq \text{Freq}(A) + \text{Freq}(C)$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ la **fréquence relative** d'un événement tend vers la **probabilité** de cet événement

Probabilités Élémentaires

- Soit Ω un ensemble fondamental, P la fonction de probabilité qui à tout événement A associe un nombre réel positif ou nul. $P(A)$ est appelée **probabilité** de l'événement A si :

$$P(A) \geq 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$\text{si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{si } A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

on en déduit que :

$$\checkmark P(\emptyset) = 0$$

$$\checkmark P(A) \leq 1$$

$$\checkmark P(C_A) = 1 - P(A)$$

$$\checkmark \text{si } A \subset B, \text{ alors } P(A) \leq P(B)$$

$$\checkmark P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilités Conditionnelles

- Exemple :
 - ✓ On s'intéresse au test de l'Hémocult dans le cadre du dépistage du cancer colorectal.
 - ✓ La probabilité d'avoir un cancer colorectal sachant le test Hémocult positif est une probabilité conditionnelle

$P(\text{CCR} \mid \text{Hémoc. Positif})$

Probabilités Conditionnelles

- La probabilité de A sachant B est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

d'où $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
et

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Théorème de Bayes

Indépendance en Probabilité

- A et B sont indépendants ssi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Si A et B sont indépendants et $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, alors

$$P(A \setminus B) = P(A \cap B) \setminus P(B) = P(A) \cdot P(B) \setminus P(B) = P(A)$$

- 2 événements disjoints de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants
 - ✓ disjoints : $P(A \cap B) = 0$
 - ✓ indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilités Conditionnelles

- A_1, \dots, A_n événements formant une **partition** de Ω
- B un événement quelconque

Alors

$$P(B) = P(B \cap A_1) \cup P(B \cap A_2) \cup \dots \cup P(B \cap A_n)$$

Et

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) P(A_i)}{P(B | A_1) P(A_1) + \dots + P(B | A_n) P(A_n)}$$

Formule développée de Bayes

Probabilités Conditionnelles

- Exemple :
 - ✓ La prévalence du SIDA dans une population est de 10 %
 - ✓ On sait qu'un test diagnostique est positif chez 95% des HIV+ et qu'il est négatif chez 98% des HIV-
 - ✓ Qu'elle est la probabilité d'être HIV+ si le test est positif

$$P(\text{HIV}+) = 0,1$$

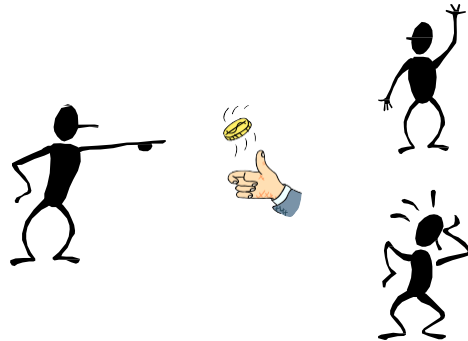
$$P(\text{T}+ \mid \text{HIV}+) = 0,95$$

$$P(\text{T}+ \mid \text{HIV}-) = 0,02$$

$$P(\text{HIV}+ \mid \text{T}+) = \frac{P(\text{T}+ \mid \text{HIV}+)P(\text{HIV}+)}{P(\text{T}+ \mid \text{HIV}+)P(\text{HIV}+) + P(\text{T}+ \mid \text{HIV}-)P(\text{HIV}-)}$$

$$P(\text{HIV}+ \mid \text{T}+) = (0,95*0,1)/(0,95*0,1 + 0,02*0,9) = 0,84$$

Variable Aléatoire



Si Pile, A gagne 1 €

Si Face, A perd 1 €

- $\Omega : \{\text{Pile, Face}\}$
- $P(\text{Pile}) = P(\text{Face}) = 0,5$
- $G : \text{gain de A; } G = +1, \text{ si Pile; } G = -1, \text{ si Face}$
- $P(G = +1) = P(G = -1) = 0,5$
- Distribution de $G : \{(+1; 0,5), (-1; 0,5)\}$

G : **variable aléatoire** qui suit une certaine **loi de probabilité**

Variable Aléatoire : Définition

- Soit E un ensemble d'événements
- d'ensemble fondamental Ω fini, et
- a un événement élémentaire de E

Pour tout événement a appartenant à E on fait correspondre un nombre x (variable aléatoire) selon une loi bien définie

Variable Aléatoire : Exemple

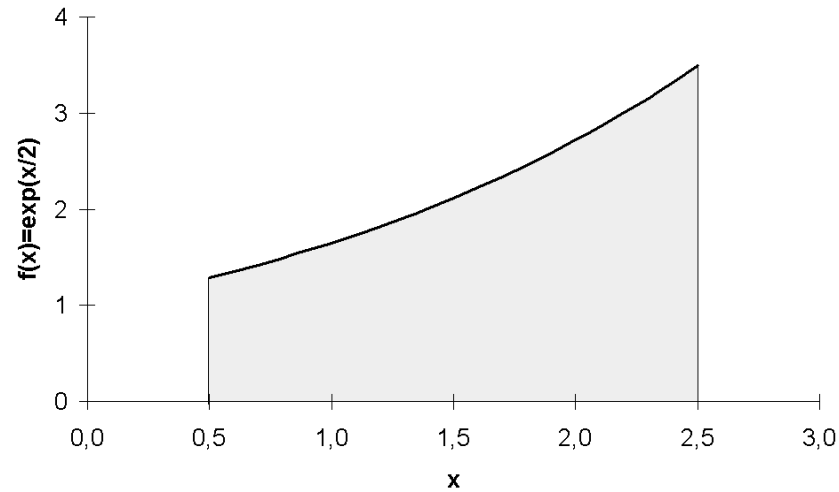
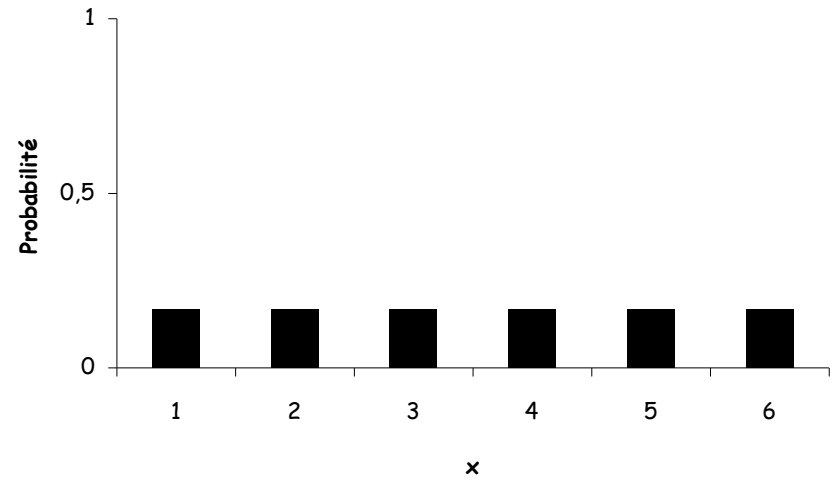
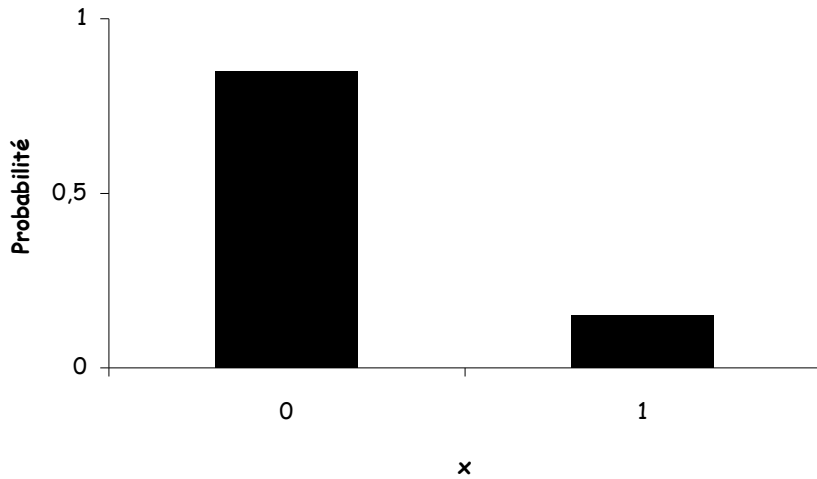
- Soit une maladie M pour laquelle il est nécessaire de débiter un TRT avant confirmation du diagnostic. Le médicament utilisé est cependant connu pour entraîner des effets indésirables.
- On sait que : $P(M^+) = 5\%$; $P(EI^+ \setminus M^+) = 30\%$; $P(EI^- \setminus M^-) = 85\%$

	M^+	M^-
EI^+	$P(EI^+ \cap M^+) = 0,3 \times 0,05$ $= 1,5\%$	$P(EI^+ \cap M^-) = (1 - 0,85) \times (1 - 0,05)$ $= 14,3\%$
	$X = 1$	$X = 1$
EI^-	$P(EI^- \cap M^+) = (1 - 0,3) \times 0,05$ $= 3,5\%$	$P(EI^- \cap M^-) = 0,85 \times (1 - 0,05)$ $= 80,8\%$
	$X = 0$	$X = 0$

où X est une va indicatrice des EI.

La distribution de X est : $\{(0; 0,84), (1; 0,16)\}$

Caractéristiques d'une Variable Aléatoire



Caractéristique de Position :

Moyenne, Espérance

- Variable discrète X
 - ✓ soit X une va prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n et $\sum p_i = 1, i = 1, \dots, n$:

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

- Cas d'une variable continue X
 - ✓ définie par une loi de densité $f(x)$

$$\mu = E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Caractéristique de Position :

Moyenne, Espérance

- Exemple 1 : $\mu = (p \times 1) + (q \times 0) = p$
- Exemple 2 : $\mu = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 3,5$
- Exemple 3 : $\mu = E(X) = \int_{0,5}^{2,5} f(x)dx = \int_{0,5}^{2,5} \exp(x/2)dx$
 $= [\exp(x/2)]_{0,5}^{2,5} = 2,21$

Caractéristique de Dispersion :

Variance, Écart-type

- Cas d'une variable discrète X :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum p_i [x_i - \mu]^2 \\ &= E((X - \mu)^2) = E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

- Cas d'une variable continue X :

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$\sigma^2 =$ variance

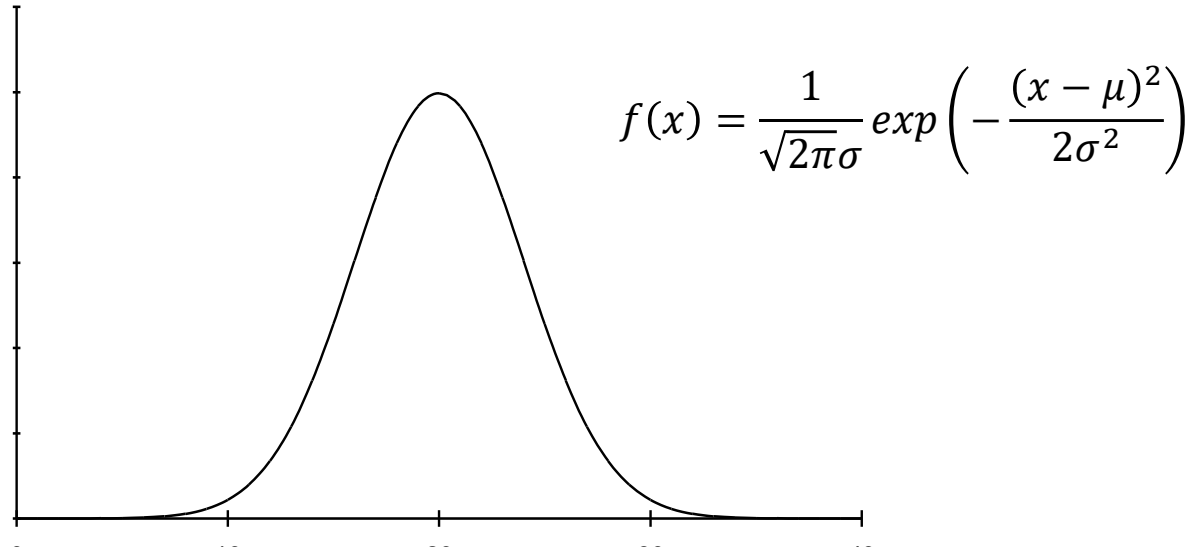
$\sigma =$ écart-type

Caractéristique de Dispersion :

Variance, Écart-type

- Exemple 1 : $\sigma^2 = p \times (1 - p)^2 + q \times (0 - p)^2 = pq$
- Exemple 2 : $\sigma^2 = 1/6[(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + \dots + (6 - 3,5)^2]$
 $= 2,9$
- Exemple 3 : $\sigma^2 = \int_{0,5}^{2,5} (x - 2,21)^2 \exp(x/2) dx = \int_{0,5}^{2,5} x^2 \exp(x/2) dx - 2,21^2$
 $= 0,68$

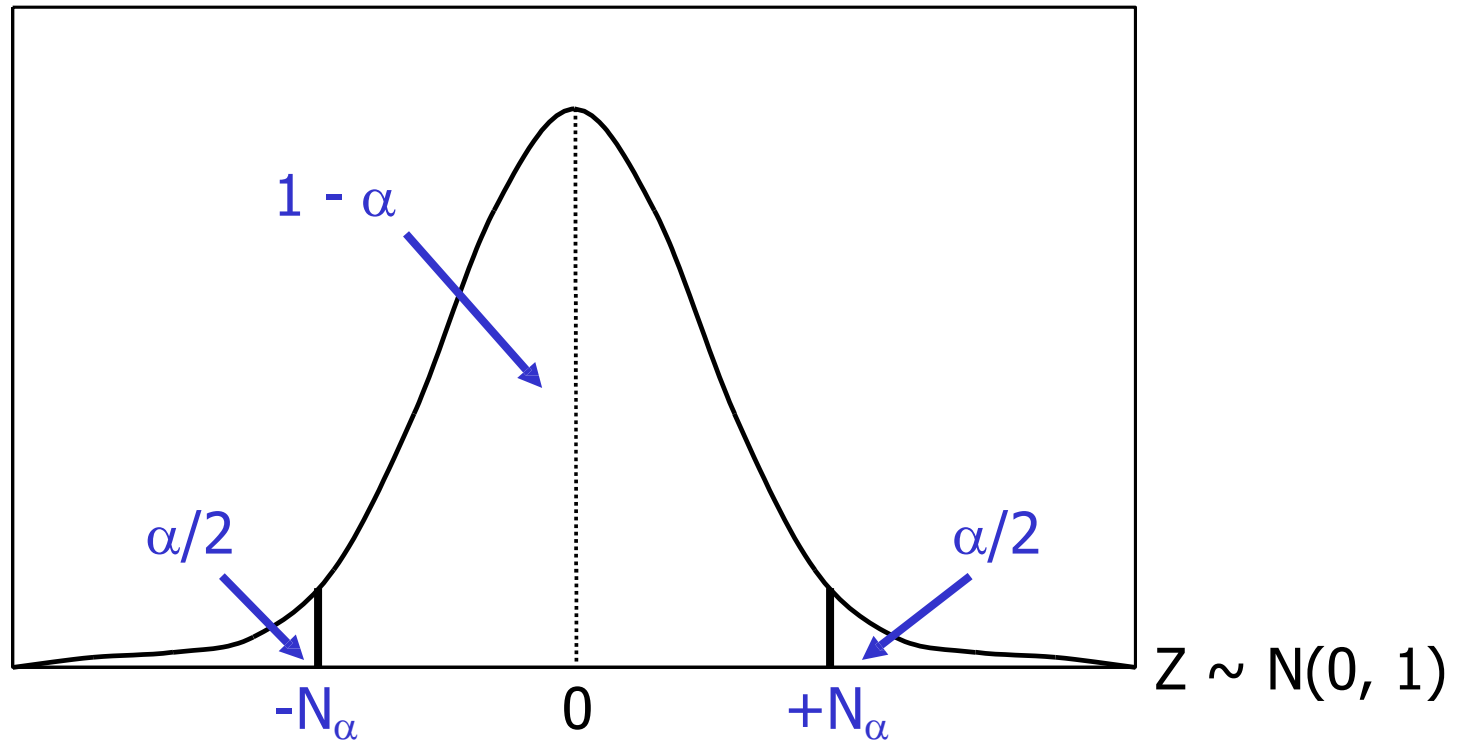
Loi Normale (Gauss)



- Propriétés

- ✓ Fonction de densité continue, déterminée par μ et σ
- ✓ Fonction de densité symétrique par rapport à μ
- ✓ Fonction de densité passe par un maximum pour $x = \mu$
(mode = μ)
- ✓ Médiane = μ

Loi Normale Centrée Réduite : $N(0, 1)$



$$\alpha = \text{Prob}(Z \leq -N_\alpha \text{ ou } Z \geq +N_\alpha) = \text{Prob}(|Z| \geq N_\alpha)$$

Table de la loi $N(0, 1)$

	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
N_α	1,64	1,96	2,58

Loi de Student

- ν : Nombre de degré de liberté (nombre de données indépendantes)
- Une famille de distributions de Student pour chaque ddl

- Propriétés

- ✓ symétrique par rapport à 0
- ✓ mode = 0
- ✓ s'aplatie quand ν petit
- ✓ Tend vers $N(0,1)$ quand $\nu \rightarrow \infty$

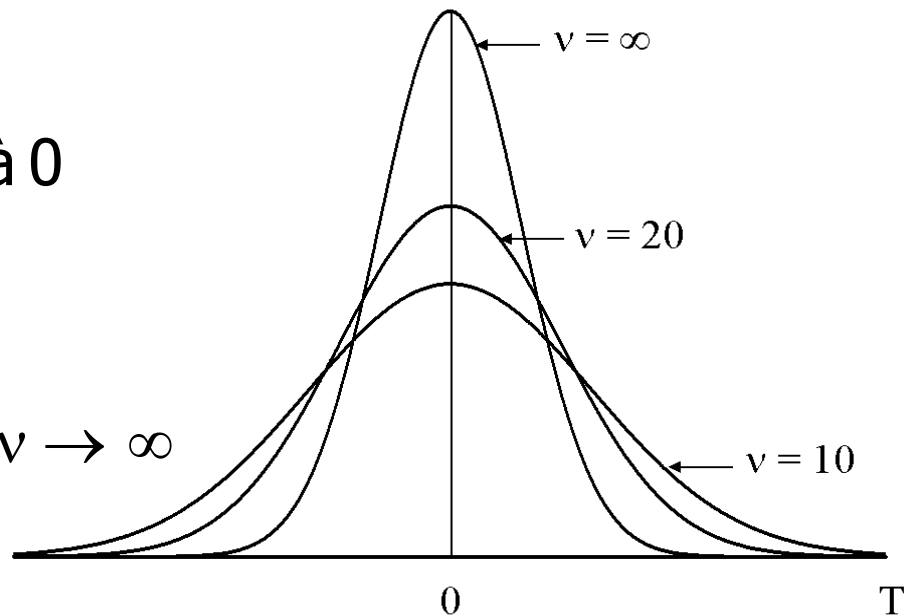


Table de la Loi de Student

- Valeur de $T_{\alpha, \nu}$ en fonction de certaines valeurs α

$$\alpha = \text{Proba} \left(T \leq -T_{\alpha, \nu} \right) \text{ ou } \left(T \geq +T_{\alpha, \nu} \right) = \text{Proba} \left(|T| \geq T_{\alpha, \nu} \right)$$

- Pour ν supérieur ou égal à 30, $T_{\alpha, \nu}$ est arrondi à N_{α}

Exemple :

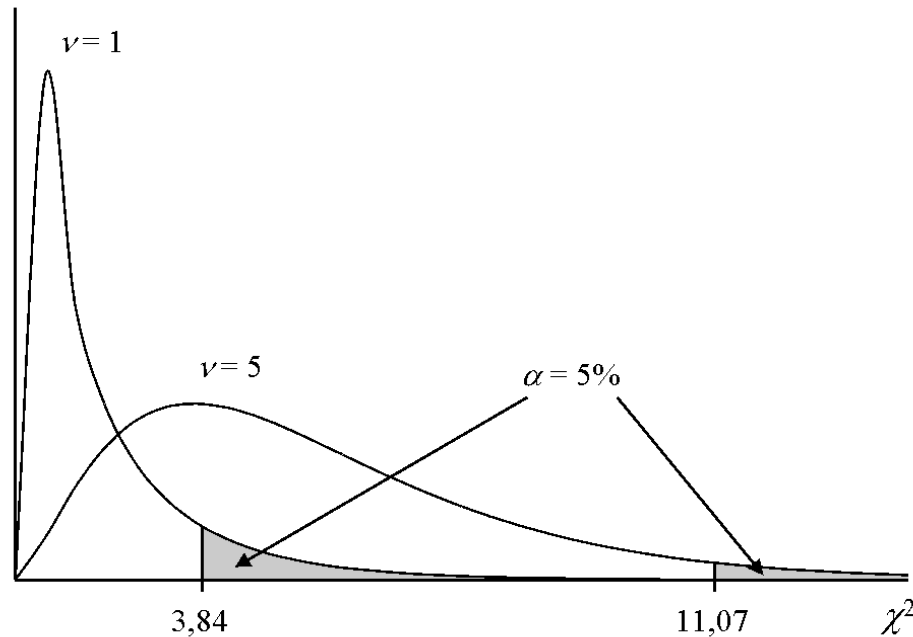
si $\alpha = 5\%$ et $\nu = 10$ alors $T_{0,05; 10} = 2,228$

si $\alpha = 10\%$ et $\nu = 8$ alors $T_{0,10; 8} = 1,860$

si $\alpha = 5\%$ et $\nu \geq 30$ alors $T_{0,05; \geq 30} = 1,96$

Loi du Chi-deux (χ^2)

- Une famille de distributions de χ^2 pour chaque ddl



- Propriétés
 - ✓ Asymétrique pour v petit

Table de la Loi du Chi-deux

- Donne la probabilité α que χ^2 soit supérieur ou égal à une valeur donnée pour chaque degré de liberté

Exemple :

si $\alpha = 5 \%$ et $\nu = 1$ alors $\chi_{0,05, 1}^2 = 3,84$

si $\alpha = 5 \%$ et $\nu = 5$ alors $\chi_{0,05, 5}^2 = 11,07$