

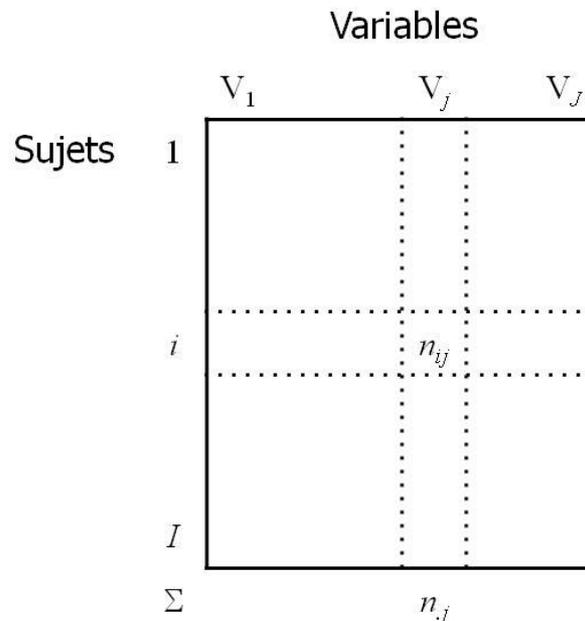
Analyse en Composantes Principales

Pr Roch Giorgi

 roch.giorgi@univ-amu.fr

Introduction (1)

- Étudier simultanément un nombre important de variables quantitatives
 - ✓ 2 variables quantitatives \Rightarrow nuage de points (espace de dimension 2)
 - ✓ J variables \Rightarrow espace de dimension J !



Introduction (2)

- Méthode pour obtenir un résumé « pertinent » des données initiales
 - ✓ Travail sur la matrice des corrélations (ou variances-covariances) entre les variables
 - On analyse la dispersion des données observées : la variance totale de toutes les variables à l'étude
 - ✓ Pour en extraire des dimensions plus globales en déformant le moins possible la réalité
 - Extraction, par un procédé mathématique adéquat, de composantes « en petit nombre »
 - Ces composantes étant orthogonales (indépendantes)
 - ✓ Et revenir à un espace de dimension réduite

Introduction (3)

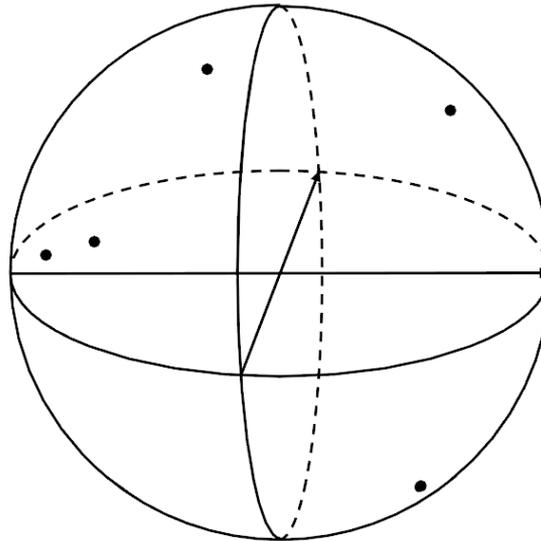
- Méthode factorielle de réduction de dimension pour l'exploration statistique de données quantitatives complexes
 - ✓ Possible également avec des variables qualitatives
- Construction du modèle statistique associé, estimation
- Représentations graphiques des individus, des variables et simultanée
- Qualité de représentation

Objectifs

- Typologie des individus
 - ✓ Ressemblances entre individus (lignes) du point de vue de l'ensemble des variables
 - ✓ En minimisant les déformations du nuage des points dans un sous-espace de dimension $q < J$
- Bilan des liaisons entre variables
 - ✓ Visualisation de la matrice des corrélations
 - ✓ Trouver des variables synthétiques explicitant au "mieux" les liaisons initiales entre ces variables
- Caractérisation des individus à partir des variables
- Réduction de l'espace dimension par un tableau de rang $q < J$

Approche Géométrique Intuitive (1)

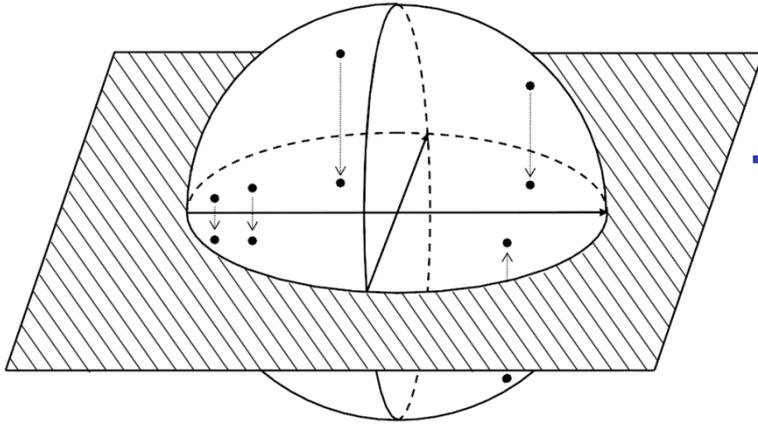
Exemple : 5 points sur une sphère de dimension de 3



Objectif : trouver une projection de ces points sur un plan en déformant le moins possible la structure originale

Source : *B. Falissard. The analyse of questionnaire data with R. CRC Press, 2012.*

Approche Géométrique Intuitive (2)

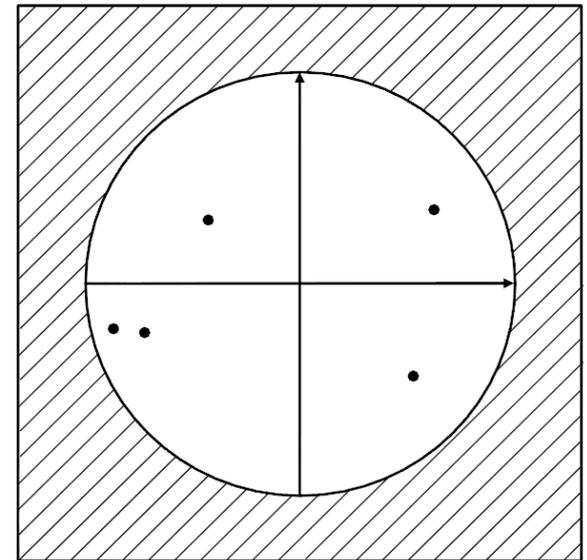


Pour comprendre globalement l'association entre les variables voici le plan sur lequel les points sont projetés

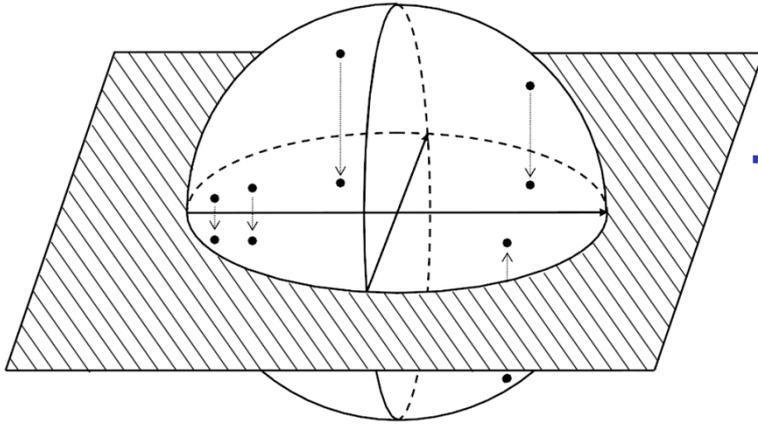


Si 2 points de l'hyper-sphère sont proches et s'ils sont à proximité du plan :

- Leurs projections seront également proches
- Les projections seront à proximité du cercle qui correspond à l'intersection de l'hyper-sphère avec le plan



Approche Géométrique Intuitive (3)

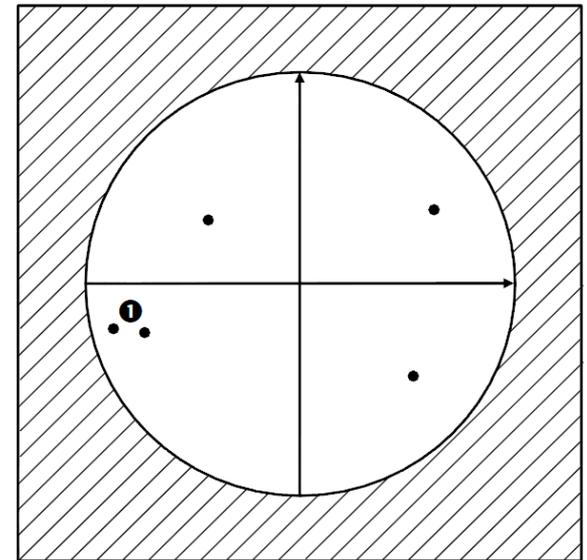


Pour comprendre globalement l'association entre les variables voici le plan sur lequel les points sont projetés

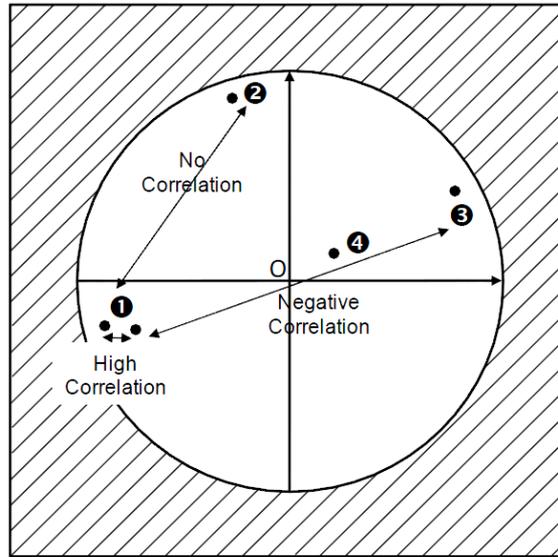


Les points en ❶ sont proches et à proximité du cercle

- Les points originels sur l'hyper-sphère sont également proches
- Les 2 variables correspondantes sont positivement et plutôt fortement corrélées



Approche Géométrique Intuitive (4)



Quand 2 points sont proches et à proximité du cercle, les variables correspondantes sont positivement corrélées ❶

Quand 2 points sont à proximité du cercle et forment un angle droit avec l'origine (O), les variables correspondantes ne sont pas corrélées ❷

Quand 2 points sont diamétralement opposés et à proximité du cercle, les variables correspondantes sont négativement corrélées ❸

Quand un point est proche de (O), rien ne peut être dit ❹

Principes (1)

- Analyse reposant sur la dispersion des données observées (variance totale observée)
- Utilisation de la matrice des variances-covariances (ou des corrélations)
- Procédure mathématique pour « extraire » des composantes (transformations mathématiques des variables initiales) expliquant la structure des données
 - ✓ Composante des observations est une combinaison linéaire des variables

$$\text{Composante}_c = \text{coef}_{c1} \cdot V_1 + \text{coef}_{c2} \cdot V_2 + \dots + \text{coef}_{cJ} \cdot V_J$$

où les coefficients sont à estimer

Principes (2)

Algorithme ayant 2 contraintes

1. La première composante doit maximiser la proportion de variance expliquée dans les variables initiales (V_1, \dots, V_J)

$$C_1 = a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + \dots + a_{1J}V_J$$

- ✓ Les coefficients a_1 sont déterminés de manière à ce que la première composante maximise la proportion de variance expliquée dans les variables initiales (V_1, \dots, V_J)
- ✓ Une certaine contrainte est mise sur le vecteur a_1
- ✓ a_1 est le vecteur propre de la matrice de variance-covariance correspondant à sa plus grande valeur

Principes (3)

Algorithme ayant 2 contraintes (cont.)

2. Extraction des composantes suivantes indépendantes des précédentes

$$C_2 = a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + \dots + a_{2J}V_J$$

⋮

$$C_J = a_{J1}V_1 + a_{J2}V_2 + \dots + a_{JJ}V_J$$

✓ Idem pour les coefficients a_j

Propriétés

- Si les valeurs propres de la matrice de variance-covariance sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J$, la variance de la $j^{\text{ème}}$ composante principale vaut λ_j
- La variance totale des J composantes principales = total de la variance des variables originales
 - ✓ La $j^{\text{ème}}$ composante principale compte pour une proportion P_j de la variation totale des données originales
 - ✓ Les m premières composantes principales, $m < J$, comptent pour une $P^{(m)}$ de la variation totale des données originales

Principes (4)

- La proportion de variance expliquée diminue avec le nombre de composantes
- La proportion de variance totale cumulée pourra atteindre 100 %
 - ✓ Nombre de composantes extraites = nombre de variables
- Critères statistiques pour déterminer le nombre de composantes pertinentes à extraire
- Réalisation de graphiques dans l'espace de dimension définie par le nombre de composantes extraites
 - ✓ Représentation des distances euclidiennes inter individus
 - ✓ Représentation des corrélations inter variables

Exemple

Pollution de l'air dans des villes des Etats-Unis

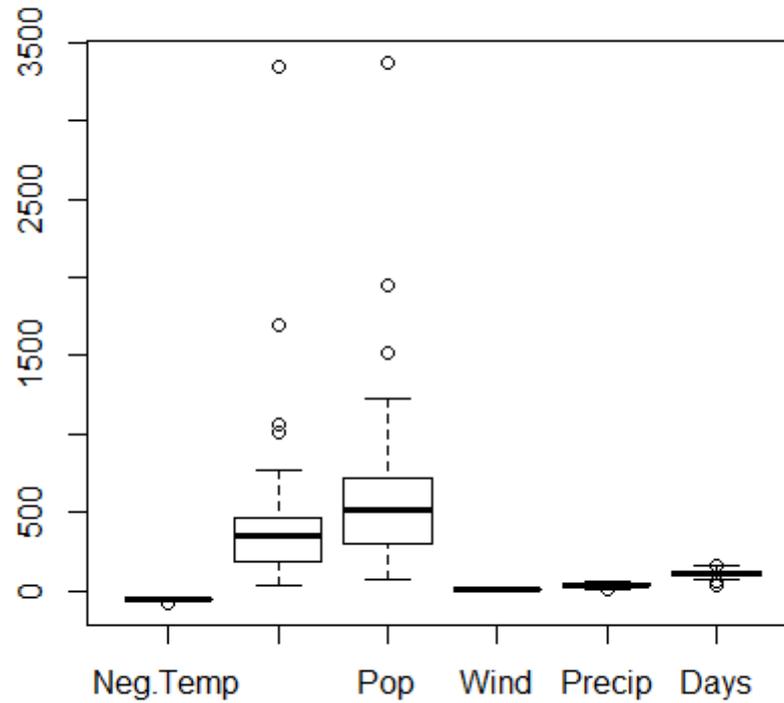
- Objectif initial de l'étude : Etudier les déterminants de la pollution atmosphérique par SO₂
- 41 villes
- 7 variables mesurées
 - ✓ SO₂, Neg.Temp, Manuf, Pop, Wind, Precip, Days
- Objectifs de l'analyse :
 1. Exploration des données par ACP
 2. Prédicteurs de SO₂

Descriptif

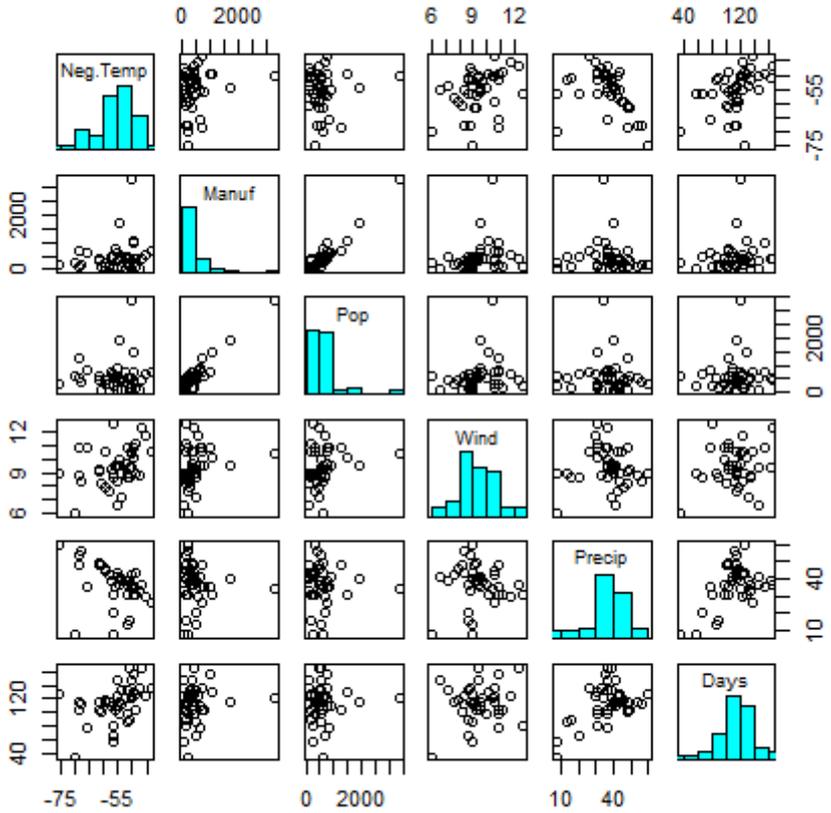
| Neg. Temp | Manuf | Pop |
|------------------|----------------|----------------|
| Min. : -75.50 | Min. : 35.0 | Min. : 71.0 |
| 1st Qu.: -59.30 | 1st Qu.: 181.0 | 1st Qu.: 299.0 |
| Median : -54.60 | Median : 347.0 | Median : 515.0 |
| Mean : -55.76 | Mean : 463.1 | Mean : 608.6 |
| 3rd Qu.: -50.60 | 3rd Qu.: 462.0 | 3rd Qu.: 717.0 |
| Max. : -43.50 | Max. : 3344.0 | Max. : 3369.0 |

| Wind | Precip | Days |
|-----------------|----------------|----------------|
| Min. : 6.000 | Min. : 7.05 | Min. : 36.0 |
| 1st Qu.: 8.700 | 1st Qu.: 30.96 | 1st Qu.: 103.0 |
| Median : 9.300 | Median : 38.74 | Median : 115.0 |
| Mean : 9.444 | Mean : 36.77 | Mean : 113.9 |
| 3rd Qu.: 10.600 | 3rd Qu.: 43.11 | 3rd Qu.: 128.0 |
| Max. : 12.700 | Max. : 59.80 | Max. : 166.0 |

Box-Plot



Treillis



Matrice de Corrélations (1)

| | Neg.Temp | Manuf | Pop | Wind | Precip | Days |
|----------|----------|-------|-------|-------|--------|------|
| Neg.Temp | 1 | 0,19 | 0,06 | 0,35 | -0,39 | 0,43 |
| Manuf | 0,19 | 1 | 0,96 | 0,24 | -0,03 | 0,13 |
| Pop | 0,06 | 0,96 | 1 | 0,21 | -0,03 | 0,04 |
| Wind | 0,35 | 0,24 | 0,21 | 1 | -0,01 | 0,16 |
| Precip | -0,39 | -0,03 | -0,03 | -0,01 | 1 | 0,5 |
| Days | 0,43 | 0,13 | 0,04 | 0,16 | 0,5 | 1 |

- Coefficients de corrélation linéaire des variables prises 2 à 2
 - ✓ Diagonale ne comporte que des 1
 - ✓ Matrice symétrique par rapport à la diagonale
- Coefficients
 - ✓ Positifs ou négatifs
 - ✓ Faibles ou forts
 - ✓ De -1 à $+1$
- Un certain degré d'intercorrélation est nécessaire pour extraire une composante correspondant à une fonction linéaire des variables initiales

Matrice de Corrélations (2)

- La matrice ne doit pas être singulière
 - ✓ Matrice singulière
 - Au moins une variable est parfaitement corrélée avec une autre variable ou avec une combinaison de plusieurs variables (ex : total des scores)
 - Déterminant = 0
 - ✓ Son déterminant doit être \neq de 0 ($> 0,00001$)
- La matrice ne doit pas être la matrice d'identité
 - ✓ Matrice d'identité
 - Matrice ne comportant que des 0 sauf des 1 sur la diagonale
 - Déterminant = 1
 - ✓ Son déterminant doit être \neq de 1
 - ✓ Testé par le test de sphéricité de Barlett

Matrice de Corrélations (3)

| | Neg.Temp | Manuf | Pop | Wind | Precip | Days |
|----------|----------|-------|-------|-------|--------|------|
| Neg.Temp | 1 | 0,19 | 0,06 | 0,35 | -0,39 | 0,43 |
| Manuf | 0,19 | 1 | 0,96 | 0,24 | -0,03 | 0,13 |
| Pop | 0,06 | 0,96 | 1 | 0,21 | -0,03 | 0,04 |
| Wind | 0,35 | 0,24 | 0,21 | 1 | -0,01 | 0,16 |
| Precip | -0,39 | -0,03 | -0,03 | -0,01 | 1 | 0,5 |
| Days | 0,43 | 0,13 | 0,04 | 0,16 | 0,5 | 1 |

```
> det(cor(usair[, -1]))  
[1] 0.01378401
```

```
> bartlett(usair[, -1])  
$pvalue  
[1] 6.878465e-31
```

Résultats de l'ACP (1)

| Eigenvalues | Dim.1 | Dim.2 | Dim.3 | Dim.4 | Dim.5 | Dim.6 | ① |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---|
| Variance | 2.196 | 1.500 | 1.395 | 0.760 | 0.115 | 0.034 | ② |
| % of var. | 36.603 | 24.999 | 23.244 | 12.670 | 1.910 | 0.574 | ③ |
| Cumulative % of var. | 36.603 | 61.602 | 84.846 | 97.516 | 99.426 | 100.000 | ④ |

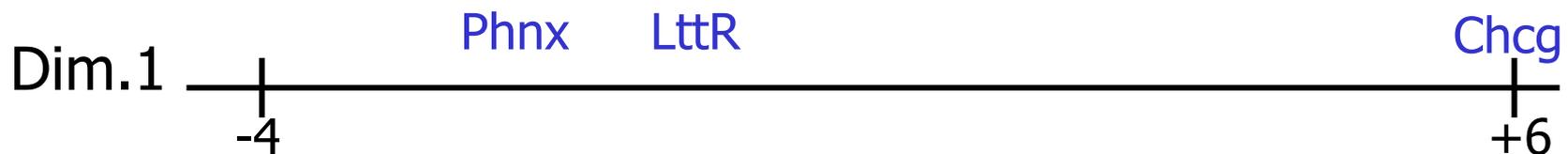
- ① Nombre de composantes extraites = 6 (\Leftrightarrow # variables)
- ② Valeurs propres de chaque composante (somme = 6)
 - ✓ Chaque variable a 1 unité de variance
- ③ % de variance totale expliquée par chaque composante
- ④ % cumulé de variance totale expliquée

Résultats de l'ACP (2)

Individuals (the 10 first)

| | Dist | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Phnx | 5.069 | -2.440 | 6.613 | 0.232 | -4.191 | 28.563 | 0.684 | 0.942 | 1.550 | 0.035 |
| LttR | 1.939 | -1.612 | 2.884 | 0.691 | 0.342 | 0.191 | 0.031 | 0.840 | 1.233 | 0.188 |
| SnFr | 2.337 | -0.502 | 0.280 | 0.046 | -2.255 | 8.271 | 0.932 | -0.227 | 0.090 | 0.009 |
| Dnvr | 2.398 | -0.207 | 0.048 | 0.007 | -1.963 | 6.267 | 0.670 | -1.266 | 2.804 | 0.279 |
| Hrtf | 1.474 | -0.219 | 0.053 | 0.022 | 0.976 | 1.550 | 0.439 | -0.595 | 0.618 | 0.163 |
| Wlmn | 1.256 | -0.996 | 1.102 | 0.629 | 0.501 | 0.408 | 0.159 | -0.433 | 0.328 | 0.119 |
| Wshn | 0.415 | -0.023 | 0.001 | 0.003 | -0.055 | 0.005 | 0.017 | 0.354 | 0.219 | 0.727 |
| Jcks | 2.456 | -1.228 | 1.674 | 0.250 | 0.849 | 1.172 | 0.120 | 1.876 | 6.156 | 0.584 |
| Miam | 3.521 | -1.533 | 2.611 | 0.190 | 1.405 | 3.209 | 0.159 | 2.607 | 11.882 | 0.548 |
| Atln | 1.328 | -0.599 | 0.398 | 0.203 | 0.587 | 0.561 | 0.195 | 0.995 | 1.733 | 0.562 |

- Résultats sur les individus (les « villes » ici)
 - ✓ Position sur chaque composante



Résultats de l'ACP (3)

Individuals (the 10 first)

| | Dist | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Phnx | 5.069 | -2.440 | 6.613 | 0.232 | -4.191 | 28.563 | 0.684 | 0.942 | 1.550 | 0.035 |
| LttR | 1.939 | -1.612 | 2.884 | 0.691 | 0.342 | 0.191 | 0.031 | 0.840 | 1.233 | 0.188 |
| SnFr | 2.337 | -0.502 | 0.280 | 0.046 | -2.255 | 8.271 | 0.932 | -0.227 | 0.090 | 0.009 |
| Dnvr | 2.398 | -0.207 | 0.048 | 0.007 | -1.963 | 6.267 | 0.670 | -1.266 | 2.804 | 0.279 |
| Hrtf | 1.474 | -0.219 | 0.053 | 0.022 | 0.976 | 1.550 | 0.439 | -0.595 | 0.618 | 0.163 |
| Wlmn | 1.256 | -0.996 | 1.102 | 0.629 | 0.501 | 0.408 | 0.159 | -0.433 | 0.328 | 0.119 |
| Wshn | 0.415 | -0.023 | 0.001 | 0.003 | -0.055 | 0.005 | 0.017 | 0.354 | 0.219 | 0.727 |
| Jcks | 2.456 | -1.228 | 1.674 | 0.250 | 0.849 | 1.172 | 0.120 | 1.876 | 6.156 | 0.584 |
| Miam | 3.521 | -1.533 | 2.611 | 0.190 | 1.405 | 3.209 | 0.159 | 2.607 | 11.882 | 0.548 |
| Atln | 1.328 | -0.599 | 0.398 | 0.203 | 0.587 | 0.561 | 0.195 | 0.995 | 1.733 | 0.562 |

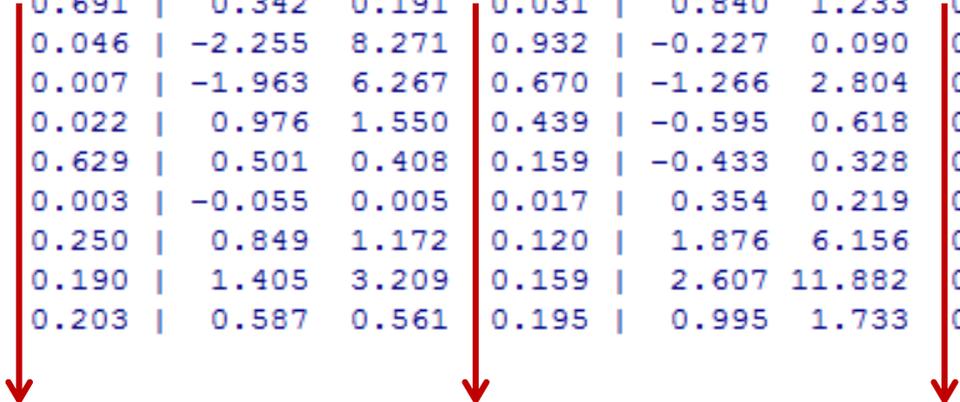


Contribution des individus sur la Dim.1 (leur somme=100)

Résultats de l'ACP (4)

Individuals (the 10 first)

| | Dist | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Phnx | 5.069 | -2.440 | 6.613 | 0.232 | -4.191 | 28.563 | 0.684 | 0.942 | 1.550 | 0.035 |
| LttR | 1.939 | -1.612 | 2.884 | 0.691 | 0.342 | 0.191 | 0.031 | 0.840 | 1.233 | 0.188 |
| SnFr | 2.337 | -0.502 | 0.280 | 0.046 | -2.255 | 8.271 | 0.932 | -0.227 | 0.090 | 0.009 |
| Dnvr | 2.398 | -0.207 | 0.048 | 0.007 | -1.963 | 6.267 | 0.670 | -1.266 | 2.804 | 0.279 |
| Hrtf | 1.474 | -0.219 | 0.053 | 0.022 | 0.976 | 1.550 | 0.439 | -0.595 | 0.618 | 0.163 |
| Wlmn | 1.256 | -0.996 | 1.102 | 0.629 | 0.501 | 0.408 | 0.159 | -0.433 | 0.328 | 0.119 |
| Wshn | 0.415 | -0.023 | 0.001 | 0.003 | -0.055 | 0.005 | 0.017 | 0.354 | 0.219 | 0.727 |
| Jcks | 2.456 | -1.228 | 1.674 | 0.250 | 0.849 | 1.172 | 0.120 | 1.876 | 6.156 | 0.584 |
| Miam | 3.521 | -1.533 | 2.611 | 0.190 | 1.405 | 3.209 | 0.159 | 2.607 | 11.882 | 0.548 |
| Atln | 1.328 | -0.599 | 0.398 | 0.203 | 0.587 | 0.561 | 0.195 | 0.995 | 1.733 | 0.562 |

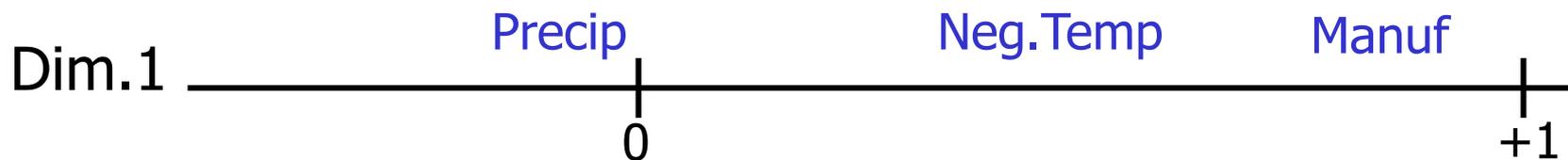

 Carré des corrélations entre Phnx et Dim.1, Dim.2 et Dim.3
 Leur somme = 1
 (cosinus carré de la coordonnée d'une variable sur les Dim.)

Résultats de l'ACP (5)

Variables

| | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|----------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Neg.Temp | 0.489 | 10.867 | 0.239 | 0.156 | 1.628 | 0.024 | -0.793 | 45.116 | 0.629 |
| Manuf | 0.906 | 37.398 | 0.821 | -0.206 | 2.824 | 0.042 | 0.322 | 7.447 | 0.104 |
| Pop | 0.856 | 33.388 | 0.733 | -0.272 | 4.949 | 0.074 | 0.414 | 12.276 | 0.171 |
| Wind | 0.524 | 12.520 | 0.275 | 0.160 | 1.711 | 0.026 | -0.351 | 8.836 | 0.123 |
| Precip | -0.060 | 0.167 | 0.004 | 0.763 | 38.795 | 0.582 | 0.596 | 25.458 | 0.355 |
| Days | 0.353 | 5.660 | 0.124 | 0.867 | 50.093 | 0.751 | -0.110 | 0.867 | 0.012 |

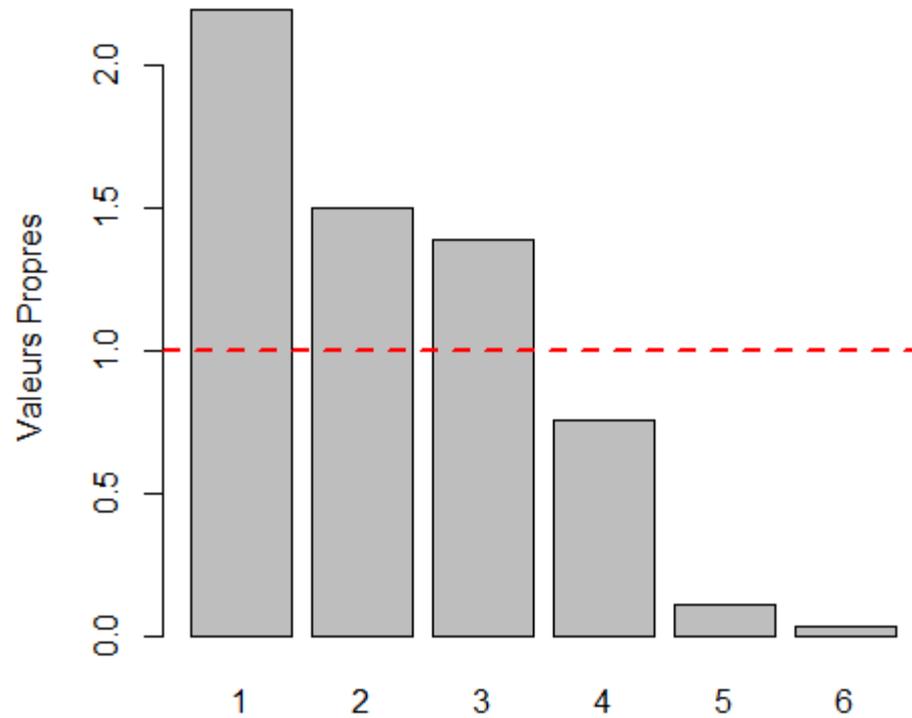
- Résultats sur les variables
 - ✓ Position sur chaque composante



Détermination du Nombre de Composantes

- Règle de Kaiser
 - ✓ Si tous les éléments sont indépendants, les composantes sont toutes de variance=1
 - ✓ Conservation des composantes dont valeur propre > 1
- Eboulis des valeurs propres (screeplot)
 - ✓ Critère graphique
 - ✓ Arrêt de l'extraction des composantes déterminé par le changement de pente

Nombre de Composantes



Résultats de l'ACP sur 3 Composantes (1)

Eigenvalues

| | Dim.1 | Dim.2 | Dim.3 | Dim.4 | Dim.5 | Dim.6 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| Variance | 2.196 | 1.500 | 1.395 | 0.760 | 0.115 | 0.034 |
| % of var. | 36.603 | 24.999 | 23.244 | 12.670 | 1.910 | 0.574 |
| Cumulative % of var. | 36.603 | 61.602 | 84.846 | 97.516 | 99.426 | 100.000 |

Individuals (the 10 first)

| | Dist | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|------|-------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Phnx | 5.069 | -2.440 | 6.613 | 0.232 | -4.191 | 28.563 | 0.684 | 0.942 | 1.550 | 0.035 |
| LttR | 1.939 | -1.612 | 2.884 | 0.691 | 0.342 | 0.191 | 0.031 | 0.840 | 1.233 | 0.188 |
| SnFr | 2.337 | -0.502 | 0.280 | 0.046 | -2.255 | 8.271 | 0.932 | -0.227 | 0.090 | 0.009 |
| Dnvr | 2.398 | -0.207 | 0.048 | 0.007 | -1.963 | 6.267 | 0.670 | -1.266 | 2.804 | 0.279 |
| Hrtf | 1.474 | -0.219 | 0.053 | 0.022 | 0.976 | 1.550 | 0.439 | -0.595 | 0.618 | 0.163 |
| Wlmn | 1.256 | -0.996 | 1.102 | 0.629 | 0.501 | 0.408 | 0.159 | -0.433 | 0.328 | 0.119 |
| Wshn | 0.415 | -0.023 | 0.001 | 0.003 | -0.055 | 0.005 | 0.017 | 0.354 | 0.219 | 0.727 |
| Jcks | 2.456 | -1.228 | 1.674 | 0.250 | 0.849 | 1.172 | 0.120 | 1.876 | 6.156 | 0.584 |
| Miam | 3.521 | -1.533 | 2.611 | 0.190 | 1.405 | 3.209 | 0.159 | 2.607 | 11.882 | 0.548 |
| AtlN | 1.328 | -0.599 | 0.398 | 0.203 | 0.587 | 0.561 | 0.195 | 0.995 | 1.733 | 0.562 |

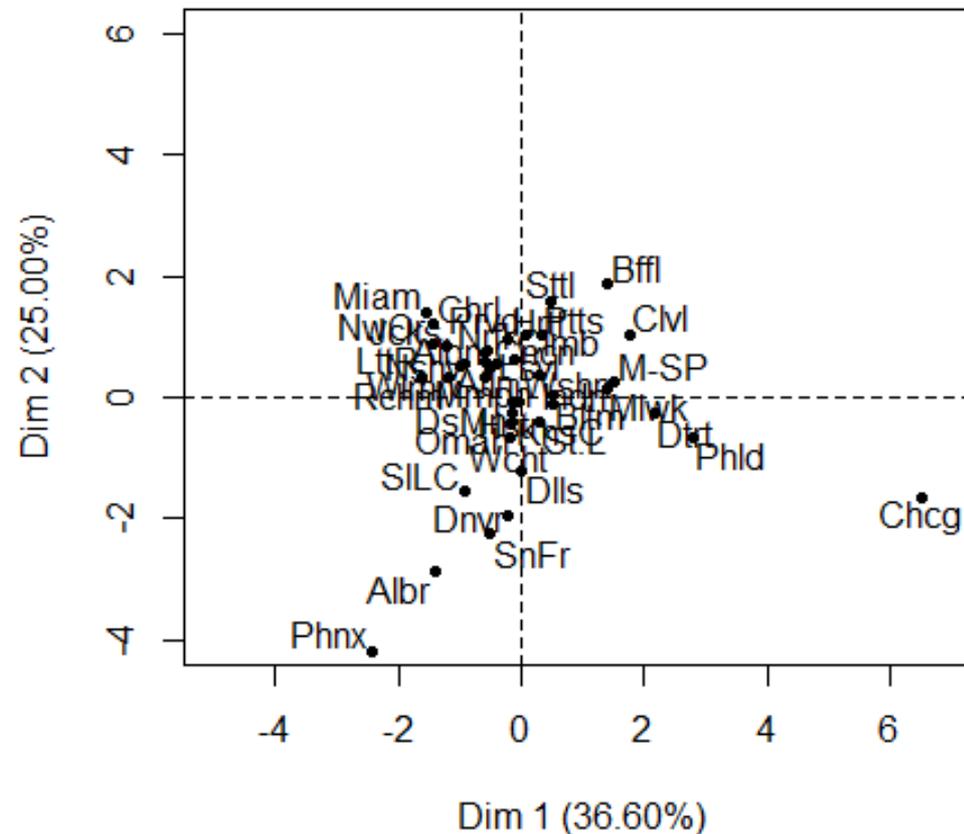
Variables

| | Dim.1 | ctr | cos2 | Dim.2 | ctr | cos2 | Dim.3 | ctr | cos2 |
|----------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Neg.Temp | 0.489 | 10.867 | 0.239 | 0.156 | 1.628 | 0.024 | -0.793 | 45.116 | 0.629 |
| Manuf | 0.906 | 37.398 | 0.821 | -0.206 | 2.824 | 0.042 | 0.322 | 7.447 | 0.104 |
| Pop | 0.856 | 33.388 | 0.733 | -0.272 | 4.949 | 0.074 | 0.414 | 12.276 | 0.171 |
| Wind | 0.524 | 12.520 | 0.275 | 0.160 | 1.711 | 0.026 | -0.351 | 8.836 | 0.123 |
| Precip | -0.060 | 0.167 | 0.004 | 0.763 | 38.795 | 0.582 | 0.596 | 25.458 | 0.355 |
| Days | 0.353 | 5.660 | 0.124 | 0.867 | 50.093 | 0.751 | -0.110 | 0.867 | 0.012 |

Résultats de l'ACP sur 3 Composantes (2)

Projection des individus sur les composantes

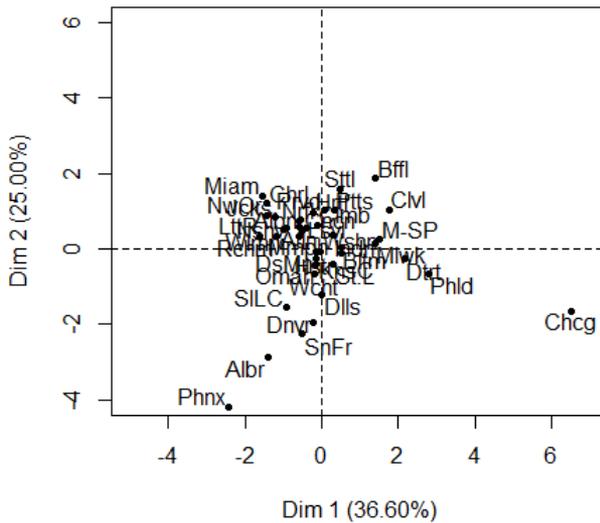
Individuals factor map (PCA)



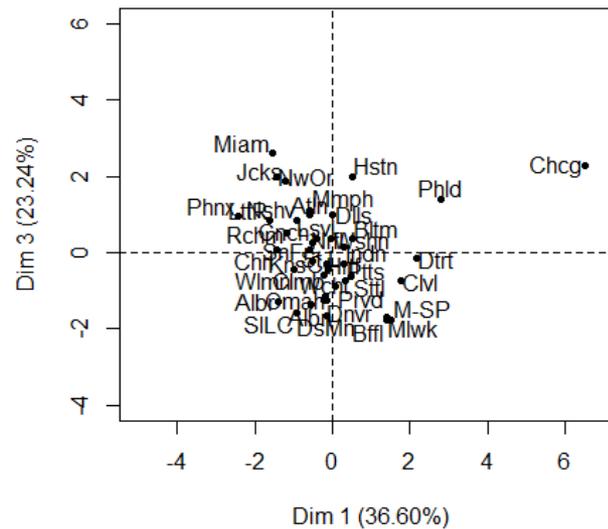
Résultats de l'ACP sur 3 Composantes (3)

Projection des individus sur les composantes

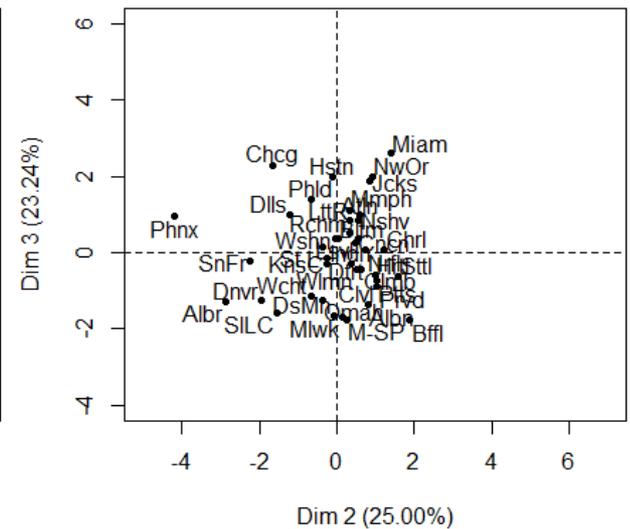
Individuals factor map (PCA)



Individuals factor map (PCA)

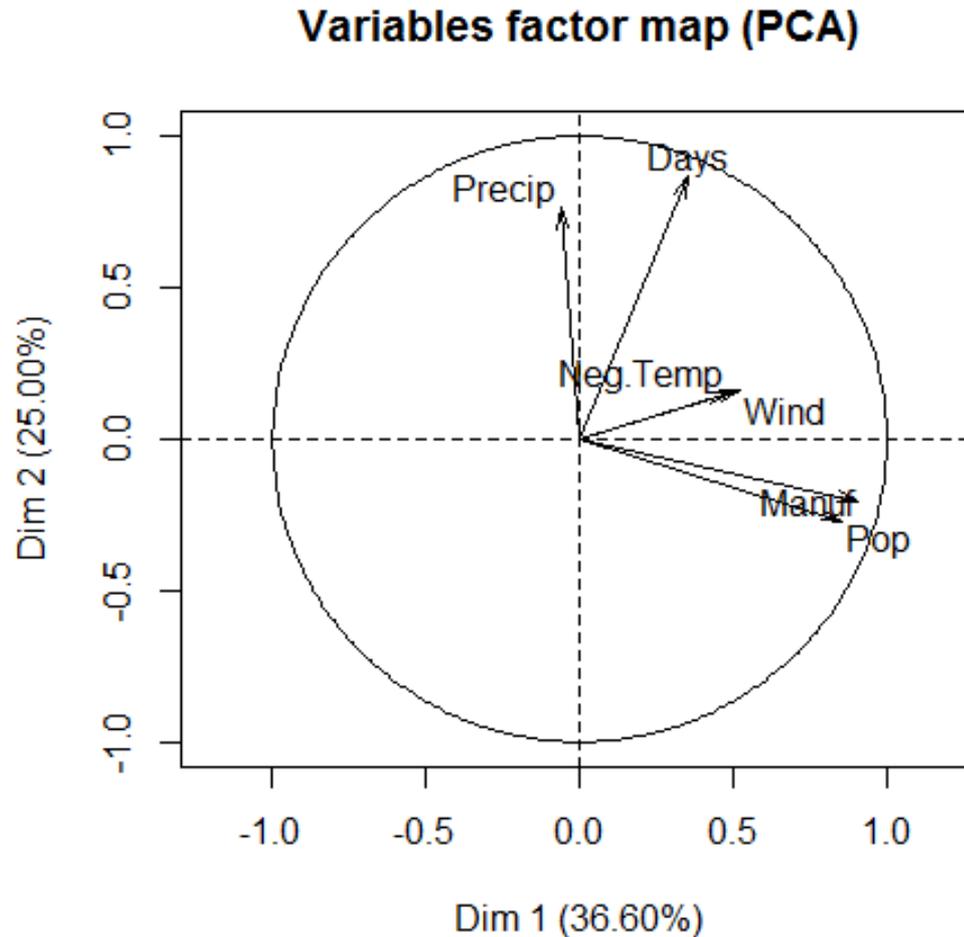


Individuals factor map (PCA)



Résultats de l'ACP sur 3 Composantes (4)

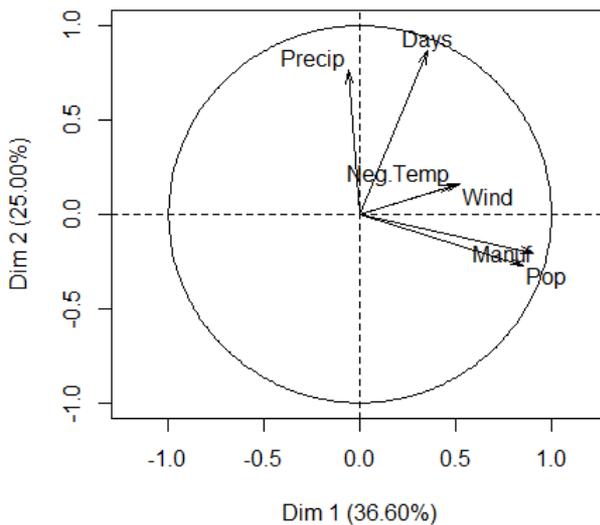
Projection des variables sur les composantes



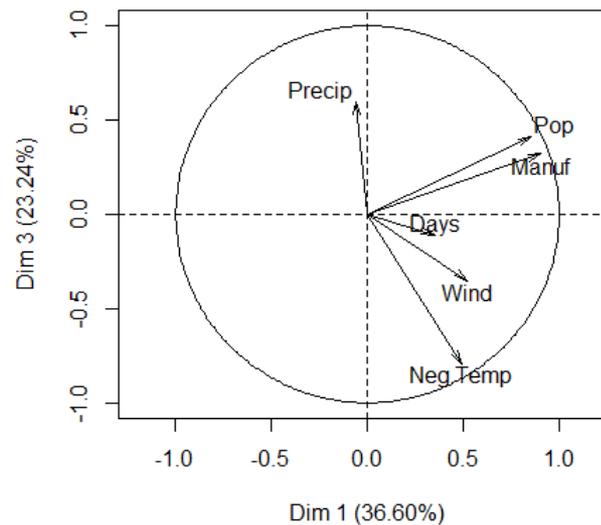
Résultats de l'ACP sur 3 Composantes (5)

Projection des variables sur les composantes

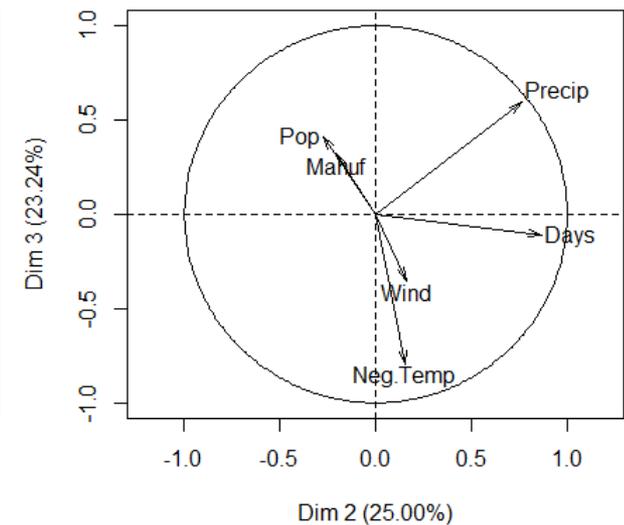
Variables factor map (PCA)



Variables factor map (PCA)



Variables factor map (PCA)



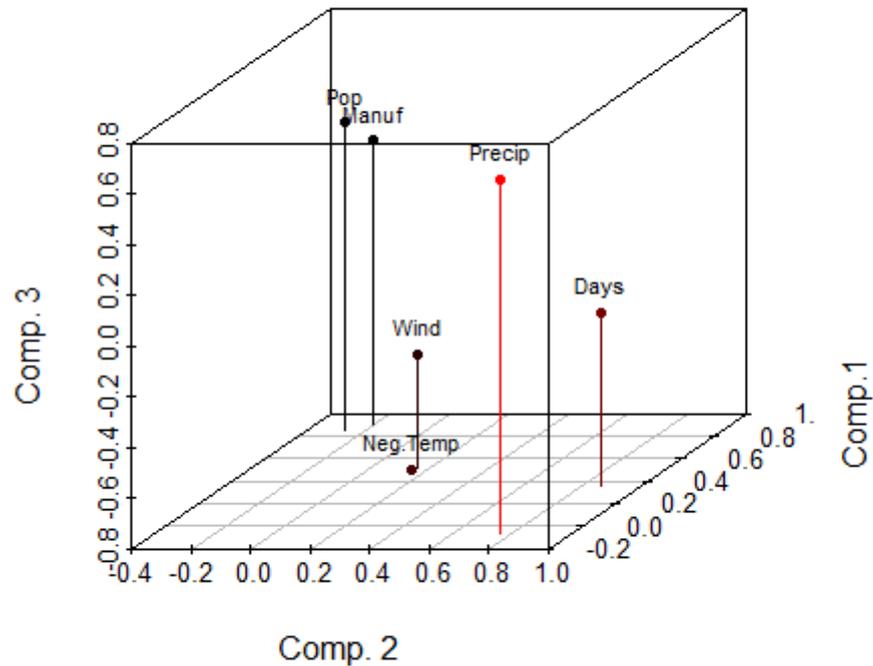
Description des Dimensions et Test

```
$Dim.1
$Dim.1$quanti
      correlation      p.value
Manuf      0.9062726 4.440892e-16
Pop        0.8563007 9.467982e-13
Wind       0.5243698 4.329391e-04
Neg.Temp   0.4885176 1.192814e-03
Days       0.3525785 2.376305e-02
```

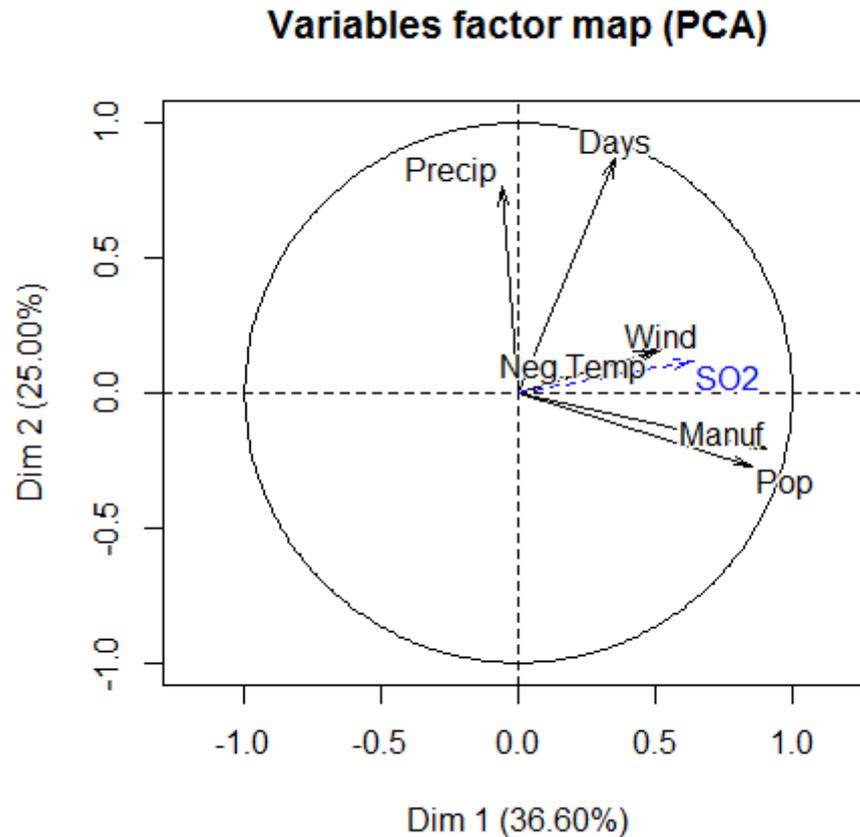
```
$Dim.2
$Dim.2$quanti
      correlation      p.value
Days   0.8668156 2.373657e-13
Precip 0.7628275 6.741009e-09
```

```
$Dim.3
$Dim.3$quanti
      correlation      p.value
Precip 0.5958649 3.950252e-05
Pop     0.4137753 7.161809e-03
Manuf   0.3222658 3.989110e-02
Wind    -0.3510421 2.442315e-02
Neg.Temp -0.7932295 6.253312e-10
```


Représentation en 3D – Variables



Ajout de Variable Supplémentaire



Effets sur la Pollution : SO2

- Régression linéaire de SO2 sur les composantes

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) |
|-----------------------------|----------|------------|---------|----------|
| (Intercept) | 30.049 | 2.907 | 10.336 | 1.85e-12 |
| usair.pca3\$ind\$coord[, 1] | 9.942 | 1.962 | 5.068 | 1.14e-05 |
| usair.pca3\$ind\$coord[, 2] | 2.240 | 2.374 | 0.943 | 0.352 |
| usair.pca3\$ind\$coord[, 3] | 0.375 | 2.462 | 0.152 | 0.880 |

...

Sources

- Brian S. Everitt. An R and S-PLUS Companion to Multivariate Analysis. Springer 2005.
- B. Falissard. The analyse of questionnaire data with R. CRC Press, 2012.
- Besse P., Baccini A. Data mining I - Exploration statistique, 2005.
- FactoMineR : <http://factominer.free.fr/>